

Invariants

Partie 2 : invariants polynomiaux

Boris Kolev

Université d'Aix-Marseille

Nantes - 9 septembre 2014

Plan de l'exposé

- 1 Invariants polynomiaux
 - Définitions, exemples
 - Structure de l'algèbre des invariants
- 2 Méthodes effectives de calcul
 - Le projecteur de Reynolds
 - Polarisation
 - Formes binaires
- 3 Les invariants du tenseur d'élasticité
- 4 Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites

Plan de l'exposé

- 1 Invariants polynomiaux
 - Définitions, exemples
 - Structure de l'algèbre des invariants
- 2 Méthodes effectives de calcul
 - Le projecteur de Reynolds
 - Polarisation
 - Formes binaires
- 3 Les invariants du tenseur d'élasticité
- 4 Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites

Fonctions Invariantes

Définition

Soit V une représentation linéaire d'un groupe G . Alors G agit sur l'espace $\mathcal{F}(V, \mathbb{R})$ des fonctions numériques sur V

$$(g \cdot f)(v) := f(g^{-1} \cdot v).$$

Les fonctions invariantes sont les points fixes de cette action sur $\mathcal{F}(V, \mathbb{R})^G$.

Remarque

En pratique, on se restreint à des classes de fonctions particulières : fonctions différentiables, rationnelles, **polynomiales**.

Invariants polynomiaux

Définition

Les fonctions polynomiales sur V sont les fonctions qui s'expriment dans une base donnée par des polynômes des coordonnées. Cette définition est indépendante du choix d'une base. L'ensemble des fonctions polynomiales sur V forme une algèbre notée $\mathbb{R}[V]$.

Définition

L'algèbre des **invariants polynomiaux** $\mathbb{R}[V]^G$ est la sous-algèbre des fonctions polynomiales sur V invariantes par G .

Exemple

Les coefficients du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f de V sont des invariants polynomiaux pour l'action de $GL(V)$ sur $\text{End}(V)$.

Exemple : le polynôme de Betten

Définition

En 1987, Betten a introduit le polynôme à 2 variables

$$\mathcal{B}_C(\lambda, \mu) = \det(C - C_{\lambda, \mu}),$$

où C est un tenseur d'élasticité et $C_{\lambda, \mu}$ est le tenseur totalement isotrope. Les coefficients de ce polynôme sont des **invariants polynomiaux** de $SO(3)$ (**mais pas par $O(6)$**).

Remarque

Si $C = D \in \mathbb{H}^4$, son polynôme caractéristique s'écrit $\chi_D(\lambda) = \lambda \chi_D^r(\lambda)$ et

$$\mathcal{B}_D(\lambda, \mu) = (3\lambda + 2\mu) \chi_D^r(2\mu).$$

Théorème de finitude

A la fin du XIX^e siècle, Hilbert a établi un théorème général de **finitude de l'algèbre des invariants** pour toute représentation d'une "bonne" classe de groupes, dont les groupes orthogonaux et tous les groupes finis.

Théorème

Pour toute représentation tensorielle de $O(n)$ ou $SO(n)$, il existe un système fini de polynômes homogènes J_1, \dots, J_N qui engendrent cette algèbre ; tout invariant polynomial peut s'écrire comme un polynôme en J_1, \dots, J_N .

Remarque

Un système de générateurs est **minimal** si on ne peut pas le réduire. Un tel système n'est pas unique mais le nombre d'éléments de degré total fixé est une constante.

Exemples

Tenseurs symétriques d'ordre 2

L'algèbre des invariants (sous l'action de $O(3)$) d'un tenseurs symétrique A d'ordre 2 est engendrée par $\text{tr}(A)$, $\text{tr}(A^2)$, $\text{tr}(A^3)$ mais aussi par les coefficients de $P_A(\lambda)$.

Polynômes symétriques

L'algèbre des invariants pour l'action du groupe des permutations \mathfrak{S}_n sur \mathbb{R}^n est donnée par les polynômes symétriques élémentaires

$$\sigma_1 = \sum x_i, \quad \sigma_2 = \sum x_i x_j, \quad \dots, \quad \sigma_n = x_1 \cdots x_n.$$

et aussi par les sommes de puissances

$$S_k = x_1^k + \cdots + x_n^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Indépendance algébrique et relations

Définition

Un système de polynômes p_1, \dots, p_N est **algébriquement indépendant** (ou libre) s'il n'existe pas de polynôme non nul R (ou **relation**) tel que :

$$R(p_1, \dots, p_N) = 0.$$

Dans le cas contraire, ils sont dits **algébriquement dépendants** (ou liés).

Remarque

Que ce soit pour l'action de $O(3)$ sur les tenseurs d'ordre 2 ou l'action du groupe des permutations \mathfrak{S}_n sur \mathbb{R}^n , les deux systèmes de générateurs présentés sont **algébriquement indépendants**.

Exemple : invariants de 2 et 3 vecteurs de \mathbb{R}^2

Action de $O(2)$ sur $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$

Système générateur minimal d'invariants :

$$\|v_1\|^2, \quad \|v_2\|^2, \quad v_1 \cdot v_2.$$

Ce système est **libre**.

Action de $O(2)$ sur $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$

Système générateur minimal d'invariants :

$$\|v_1\|^2, \quad \|v_2\|^2, \quad \|v_3\|^2, \quad v_1 \cdot v_2, \quad v_1 \cdot v_3, \quad v_2 \cdot v_3.$$

Ce système est **lié** ; il vérifie la relation algébrique :

$$\det(v_i \cdot v_j) = 0.$$

Un exemple type : action du groupe alterné sur \mathbb{R}^n

Soit \mathcal{A}_n le sous groupe de \mathfrak{S}_n des permutations paires (groupe alterné).

- Un système minimal d'invariants est donné par

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n, \Delta$$

où $\Delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ (discriminant).

- Comme Δ^2 est un polynôme symétrique :

$$\Delta^2 = P(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Les générateurs sont donc **algébriquement dépendants**.

- Tout polynôme invariant par \mathcal{A}_n s'écrit de façon unique

$$p_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\Delta + p_2(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Structure algébrique générale de $\mathbb{R}[V]^G$

Remarque

La structure générale de l'algèbre des invariants $\mathbb{R}[V]^G$ est plus proche de celle du groupe alterné que du groupe symétrique.

Décomposition de Hironaka

- ① Il existe un nombre fini d'invariants $\theta_1, \dots, \theta_r$ (dits **primaires**) qui sont algébriquement indépendants ;
- ② Il existe un nombre fini d'invariants η_1, \dots, η_p (dits **secondaires**), chacun solution d'une équation du type :

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}[\theta_1, \dots, \theta_r];$$

- ③ Tout invariant J s'écrit d'une façon unique :

$$J = b_0 + b_1 \eta_1 + \dots + b_p \eta_p, \quad b_i \in \mathbb{R}[\theta_1, \dots, \theta_r].$$

Séparation des orbites

Définition

Une famille de fonctions numériques \mathcal{A} sur V **sépare les orbites** si

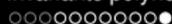
$$f(v_1) = f(v_2), \quad \forall f \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists g \in G; v_2 = g \cdot v_1.$$

Théorème

Si G est un groupe **compact**, $\mathbb{R}[V]^G$ **sépare les orbites**.

Remarque

Ce n'est pas vrai pour un groupe non compact. Par exemple, l'algèbre des invariants pour l'action par conjugaison de $GL_2(\mathbb{C})$ sur $M_2(\mathbb{C})$ est engendré par $\text{tr } A$, $\text{tr } A^2$ mais ne sépare pas les orbites (deux formes de Jordan ayant même diagonale ne sont pas séparées).



Remarques historiques

- Le calcul effectif d'un système fini de générateurs est un **problème très difficile** en général. Ce fut un des sujets majeurs des mathématiques du XIX^e siècle (**théorie classique des invariants** = action du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur les polynômes homogènes à deux variables complexes).
- Le sujet subit un coup d'arrêt brutal quand David Hilbert, vers 1890, démontra son fameux théorème de finitude pour le problème général (à l'origine de la **géométrie algébrique** moderne). Mais cette preuve abstraite fut très critiquée à l'époque pour son caractère non constructif. Gordan, le "roi des invariants" aurait déclaré : "**ce n'est pas des mathématiques, c'est de la théologie**".

Plan de l'exposé

- 1 Invariants polynomiaux
 - Définitions, exemples
 - Structure de l'algèbre des invariants
- 2 Méthodes effectives de calcul
 - Le projecteur de Reynolds
 - Polarisation
 - Formes binaires
- 3 Les invariants du tenseur d'élasticité
- 4 Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites

Le projecteur de Reynolds

Définition

Soit G un groupe fini. L'application :

$$\pi : p \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot p$$

est un projecteur de $\mathbb{R}[V]$ sur $\mathbb{R}[V]^G$ ($\pi \circ \pi = \pi$) : le **projecteur de Reynolds**.

Remarque

Ce projecteur est également défini pour un groupe compact (donc le groupe orthogonal) à condition de remplacer la somme finie par la **mesure de Haar**).

Mesure de Haar

Mesures de Haar de quelques groupes orthogonaux

- sur $SO(2)$:

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_\theta) d\theta,$$

- sur $O(2)$:

$$I(f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(r_\theta) d\theta + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma r_\theta) d\theta,$$

- sur $SO(3)$ ($\theta, \psi, \phi =$ angles d'Euler) :

$$I(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \psi, \phi) \sin^2 \theta \sin \psi d\theta d\psi d\phi$$

Conséquence : calculer des invariants

Remarque

La moyennisation d'un polynôme homogène est encore un polynôme homogène donc $\pi(\mathbb{R}[V]_n) = \mathbb{R}[V]_n^G$. En particulier

$$\dim \mathbb{R}[V]_n^G = \text{tr } \pi_{/\mathbb{R}[V]_n} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_n}(g)$$

où $\chi_{\rho_n}(g) := \text{tr } \rho_n(g)$: caractère de la représentation sur $\mathbb{R}[V]_n$.

Remarque

Le projecteur de Reynolds permet de calculer successivement tous les polynôme invariants homogènes. Le théorème de finitude nous assure qu'à partir d'un certain degré n , on a un **système de générateurs**. Le problème est que ce degré est *a priori* inconnu. Quand doit-on s'arrêter ?

Série de Hilbert

Définition

L'algèbre des invariants $\mathbb{R}[V]^G$ est une **algèbre graduée** : c'est la somme directe des sous-espaces de polynômes invariants homogènes de degré n . Posons $a_n := \dim \mathbb{R}[V]_n^G$. On introduit la **série de Hilbert** :

$$H(z) := \sum_n a_n z^n.$$

Théorème (Théorème de Molien-Weyl)

Pour un groupe fini ou compact G , la série de Hilbert s'écrit :

$$H(z) = \int_{g \in G} \frac{1}{\det(I - z\rho(g))} d\mu(g)$$

Exemples

Algèbre libre

La série de Hilbert d'une algèbre libre engendrée par $\theta_1, \dots, \theta_r$ s'écrit :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{d_1}) \cdots (1 - z^{d_r})}$$

où d_k est le degré de θ_k .

Théorème

Si $\theta_1, \dots, \theta_r$ est un système d'invariants primaires et η_1, \dots, η_p un système d'invariants secondaires, alors

$$H(z) = \frac{1 + z^{e_1} + \cdots + z^{e_p}}{(1 - z^{d_1}) \cdots (1 - z^{d_r})}$$

où d_k est le degré de θ_k et e_k celui de η_k

Application : sous-représentation de \mathfrak{S}_n

Théorème

Soit $G \subset \mathfrak{S}_n$ agissant par permutation sur \mathbb{R}^n . Alors les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ forment un système d'invariants primaires.

Remarque

Attention dans le cas général, c'est très difficile de trouver un système d'invariants primaires.

Application

Il suffit de calculer la série de Hilbert pour avoir une borne M sur le degré des invariants secondaires. En effet $M = \max e_k$ si

$$(1 - z)(1 - z^2) \cdots (1 - z^n)H(z) = 1 + z^{e_1} + \cdots + z^{e_p}.$$

Polarisation

Principe de polarisation

Une méthode classique pour construire des éléments de $\mathbb{R}[V^{\oplus n}]^G$ consiste à **polariser** les éléments de $\mathbb{R}[V]^G$, i.e. à développer l'expression

$$p(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} p_{i_1, \dots, i_n}(v_1, \dots, v_n)$$

$\text{Pol}_n \mathbb{R}[V]^G$: sous-algèbre de $\mathbb{R}[V^{\oplus n}]^G$ engendrée par les p_{i_1, \dots, i_n} .

Exemples

- 2-polarisation de $p(v) = \|v\|^2 : \|v_1\|^2, \|v_2\|^2, v_1 \cdot v_2$;
- 3-polarisation de $p(A) = \text{tr } A^3 : \text{tr } A_i^3, \text{tr } A_i^2 A_j,$
 $\text{tr}(A_i A_j A_k + A_j A_i A_k)$.

Invariants de n vecteurs

Question

Est-ce que $\text{Pol}_n \mathbb{R}[V]^G = \mathbb{R}[V^{\oplus n}]^G$? La réponse est non en général.

Théorème (Théorème fondamental de Weyl pour $O(d)$)

Soit $V = \mathbb{R}^d$, alors $\mathbb{R}[V^{\oplus n}]^{O(d)}$ est engendrée par :

$$v_i \cdot v_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq p.$$

Théorème (Théorème fondamental de Weyl pour $SO(d)$)

Soit $V = \mathbb{R}^d$, alors $\mathbb{R}[V^{\oplus n}]^{SO(d)}$ est engendrée par :

$$v_i \cdot v_j, \quad \text{et} \quad \det(v_i, v_j, v_k).$$

Systèmes de séparants

Définition (Système séparant)

Une famille $S \in \mathbb{R}[V]^G$ est un **système séparant** si :

$$s(v_1) = s(v_2), \forall s \in S \Rightarrow \exists g \in G; v_2 = g \cdot v_1$$

Remarque (Une bonne réponse nécessite une bonne question)

- ① Système de générateurs $\mathbb{R}[V]^G$? c'est un système J_1, \dots, J_N tel que pour tout polynôme invariant $Q \in \mathbb{R}[V]^G$, il existe un polynôme p tel que $P(v) = p(J_1, \dots, J_N)$.
- ② Système de séparants de $\mathbb{R}[V]^G$? c'est un système S_1, \dots, S_M qui sépare les orbites

(1) \Rightarrow (2) (car l'algèbre des invariants sépare les orbites). On s'attend donc à ce que le cardinal d'un système minimal pour (2) soit \leq à celui d'un système minimal pour (1).

Tenseurs d'ordre 1 et 2

Systèmes générateurs

Des systèmes générateurs sont connus pour la représentation de $O(3)$ sur

$$(S^2(\mathbb{R}^3))^p \oplus (\Lambda^2(\mathbb{R}^3))^q \oplus (\mathbb{R}^3)^r$$

Mais aucun système minimal pour le pb général n'a été calculé.

Systèmes de séparants

Des systèmes de séparants (plus petits) ont également été calculés (littérature vaste, voir la thèse de M. Olive pour les détails).

Pour les tenseurs d'ordre supérieur d'autres méthodes sont nécessaires.

Théorie classique des invariants

Historique

Les mathématiciens du XIX^e siècle ont développé des outils extrêmement puissants pour calculer les algèbres d'invariants **sans l'aide des ordinateurs**. Ces méthodes ont été un peu oubliées mais sont redécouvertes aujourd'hui pour les besoins du cryptage informatique et des calculs quantiques.

Théorie classique des invariants

La théorie classique des invariants ne concerne pas directement les invariants des représentations tensoriels du groupe orthogonal $O(3)$ mais ceux de l'action du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur les formes binaires. La traduction se fait via la **théorie des spineurs**. Il semble que ce soit la méthode la plus efficace pour calculer les invariants des tenseurs d'ordre supérieur à 3.

Formes binaires

Définition

L'espace des formes binaires, noté S_n est l'ensemble des polynômes homogènes de degré n sur \mathbb{C}^2 :

$$f(v) := \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} y^i, \quad v = (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Action du groupe $SL(2, \mathbb{C})$

- $SL(2, \mathbb{C})$ agit sur S_n par $(g \cdot f)(v) := f(g \cdot v)$;
- Chaque S_n est une représentation irréductible de $SL(2, \mathbb{C})$;
- Chaque représentations V de $SL(2, \mathbb{C})$ se décompose en somme direct de S_n (c.f. décomposition harmonique) :

$$V = S_{n_1} \oplus \cdots \oplus S_{n_p}.$$

Covariants des formes binaires

Remarque

Soit $f \in S_n$ et $v \in \mathbb{C}^2$. Alors :

- $f(v)$ est un polynôme en f et en v . C'est donc un élément de $\mathbb{C}[S_n \oplus \mathbb{C}^2]$;
- $(g \cdot f)(g \cdot v) = f(v)$ donc $f(v) \in \mathbb{C}[S_n \oplus \mathbb{C}^2]^{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$.

Plus généralement, toute application **polynomiale équivariante** de S_n dans $\mathbb{C}[\mathbb{C}^2]$ peut être considérée comme un élément de $\mathbb{C}[S_n \oplus \mathbb{C}^2]^{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$ et réciproquement.

Définition

$\mathbb{C}[S_n \oplus \mathbb{C}^2]^{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$ est l'**algèbre des covariants** de S_n , notée $\text{Cov}(S_n)$. Un invariant, c'est simplement un covariant de degré 0 en v .

Calcul d'un système fini de générateurs

Remarque

A la fin du XIX^e siècle, Gordan a développé une méthode très efficace pour calculer des systèmes générateurs de covariants. Elle a permis aux "anciens" de calculer les algèbres d'invariants des formes binaires jusqu'au degré 8 (sans ordinateur !).

Algorithmes de Gordan

Ceux-ci permettent :

- 1 Connaissant des systèmes finis de générateurs pour $Cov(S_p)$ et $Cov(S_q)$, d'obtenir un système fini de générateurs pour $Cov(S_p \oplus S_q)$ (**covariants joints**).
- 2 Connaissant des systèmes finis de générateurs pour $Cov(S_k)$ ($k < n$), d'obtenir un système fini de générateurs pour $Cov(S_n)$ (**covariants simples** obtenus récursivement).

Lien avec les invariants de $SO(3)$

Complexification de la représentation

Une représentation tensorielle (réelle) de $SO(3, \mathbb{R})$ s'étend en une représentation complexe de $SO(3, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} \otimes V$ et

$$\mathbb{C}[\mathbb{C} \otimes V]^{SO(3, \mathbb{C})} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}[V^{SO(3, \mathbb{R})}]$$

Lien entre $SO(3, \mathbb{C})$ et $SL(2, \mathbb{C})$

Tout matrice de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ peut s'écrire

$$(x, y, z) \mapsto M = \begin{pmatrix} iz & x + iy \\ -x + iy & -iz \end{pmatrix}$$

$SL(2, \mathbb{C})$ agit sur ces matrices et préserve $\det M = x^2 + y^2 + z^2$ ce qui induit un morphisme de groupe de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $SO(3, \mathbb{C})$.

Spineurs

Spineur

Soit

$$\phi : X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto XX^\omega = \begin{pmatrix} -uv & u^2 \\ -v^2 & uv \end{pmatrix}.$$

Alors $\text{tr } XX^\omega = 0$ et $\det XX^\omega = 0$. Donc $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et son image est le cône isotrope $\det M = 0$.

Lemme

L'application $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est covariante :

$$\phi(g \cdot X) = g\phi(X)g^{-1}.$$

Lien avec les polynômes harmoniques

Application induite sur les polynômes

$\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3$ induit une application linéaire

$$\phi^* : \mathcal{S}_n(\mathbb{C}^3) \rightarrow \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{C}^2)$$

définie par

$$(\phi^* P)(u, v) := P(\phi(u, v)).$$

Théorème

La restriction de $\phi^ : \mathbb{H}_n(\mathbb{C}^3) \rightarrow \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{C}^2)$ est un isomorphisme $SL(2, \mathbb{C})$ -covariant.*

Remarque

Si deux polynômes harmoniques coïncident sur le cône isotrope ils sont égaux.

Plan de l'exposé

- 1 Invariants polynomiaux
 - Définitions, exemples
 - Structure de l'algèbre des invariants
- 2 Méthodes effectives de calcul
 - Le projecteur de Reynolds
 - Polarisation
 - Formes binaires
- 3 Les invariants du tenseur d'élasticité
- 4 Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites

Décomposition harmonique de $\mathbb{E}la$

- Dans la décomposition harmonique de $\mathbb{E}la = \mathbb{H}^4 \oplus 2\mathbb{H}^2 \oplus 2\mathbb{H}^0$, un tenseur C s'écrit :

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} = & \lambda q_{ij} q_{kl} + \mu (q_{ik} q_{jl} + q_{il} q_{jk}) \\
 & + q_{ij} a_{kl} + q_{kl} a_{ij} \\
 & + q_{ik} b_{jl} + q_{jl} b_{ik} + q_{il} b_{jk} + q_{jk} b_{il} \\
 & + D_{ijkl},
 \end{aligned}$$

où a et b sont des formes quadratiques de trace nulle, λ, μ des scalaires, D un tenseur d'ordre 4, totalement symétrique de trace nulle et q la métrique euclidienne.

- λ, μ sont des *invariants* alors que D, a, b sont des *covariants*.

Les invariants simples

- λ, μ sont des invariants de degré 1.
- Les invariants qui ne dépendent que d'un seul des éléments irréductibles a, b , ou D sont appelés **invariants simples**.
- L'algèbre des invariants simples de a est engendrée par $\text{tr}(a^2), \text{tr}(a^3)$, idem pour b .
- Le calcul des invariants simples de D est plus difficile. Il se ramène au calcul des invariants de la **forme binaire**, de degré 8.

Les invariants simples de D

Les invariants de la forme binaire de degré 8 ont été calculés par Von Gall en 1880. Shioda a calculé la décomposition d'Hironaka de $\mathbb{C}[S_8]^{\text{SL}(2,\mathbb{C})}$ en 1967. Ils ont été retranscrits (en termes d'invariants de $\text{SO}(3)$) par Boehler-Kirillov-Onat en 1994 :

$$\begin{aligned} J_2 &= \text{tr } d_2, & J_3 &= \text{tr } D^3, & J_4 &= \text{tr } d_2^2, \\ J_5 &= \text{tr } d_2 D d_2, & J_6 &= \text{tr } d_2^3, & J_7 &= \text{tr } d_2^2 D d_2, \\ J_8 &= \text{tr } d_2^2 D^2 d_2, & J_9 &= \text{tr } d_2^2 D d_2^2, & J_{10} &= \text{tr } d_2^2 D^2 d_2^2, \end{aligned}$$

où

$$(d_2)_{ij} = D_{ipqr} D_{jpqr}, \quad (AB)_{ijkl} = A_{ijpq} B_{pqkl}, \quad \text{tr}(A) = A_{ijij}.$$

J_2, \dots, J_7 sont primaires J_8, J_9, J_{10} sont secondaires.

Les invariants joints de \mathcal{C}

En utilisant l'algorithme de Gordan, Marc Olive (2014) a finalement réussi à calculer un système minimal complet de générateurs pour le tenseur d'élasticité.

Théorème

*Le nombre minimal de générateurs de l'algèbre des invariants du tenseur d'élasticité est **299**.*

Plan de l'exposé

- 1 Invariants polynomiaux
 - Définitions, exemples
 - Structure de l'algèbre des invariants
- 2 Méthodes effectives de calcul
 - Le projecteur de Reynolds
 - Polarisation
 - Formes binaires
- 3 Les invariants du tenseur d'élasticité
- 4 Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites

Coordonnées globales et locales

- Certains sont surpris du fait que le nombre d'invariants qui sert à décrire la structure de l'espace des orbites est très supérieur au nombre de paramètres donnés par des arguments dimensionnels.
- Il ne faut pas confondre **cordonnées locales** et **coordonnées globales**.
- Un théorème de Whitney assure qu'on peut toujours plonger une variété de dimension n dans \mathbb{R}^{2n+1} mais il ne nous dit pas comment trouver ces $2n + 1$ fonctions séparantes.
- Un système de coordonnées globales est fourni, par exemple, par une base d'invariants complets (qui sépare les orbites) ou plus généralement un système de séparant.

Les invariants primaires ne séparent pas les orbites

Remarque

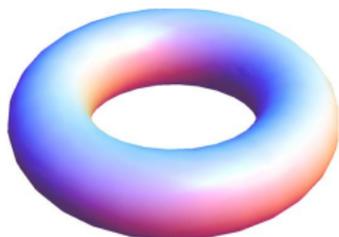
Les **invariants primaires** fournissent un système de **coordonnées locales** sur la strate générique mais pas un système de coordonnées globales.

Action du groupe alterné $\mathfrak{A}_3 = \{e, (123), (132)\}$ sur \mathbb{R}^3

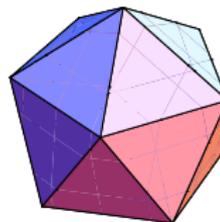
- Deux strates : $\Sigma_{[1]} = \{(x, y, z); x, y, z \text{ distincts}\}$ et $\Sigma_{[\mathfrak{A}_3]} = \{(x, x, x)\}$
- Base d'invariant : $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et $\Delta = (y - x)(z - x)(z - y)$.
- Les invariants primaires $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ne suffisent pas à séparer les orbites de la strate générique $\Sigma_{[1]}$: par exemple l'orbite de (x, y, z) et celle de (y, x, z) .
- Par contre, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ forment un système de coordonnées locales de la strate générique $\Sigma_{[1]}$.

L'espace quotient a une géométrie compliquée

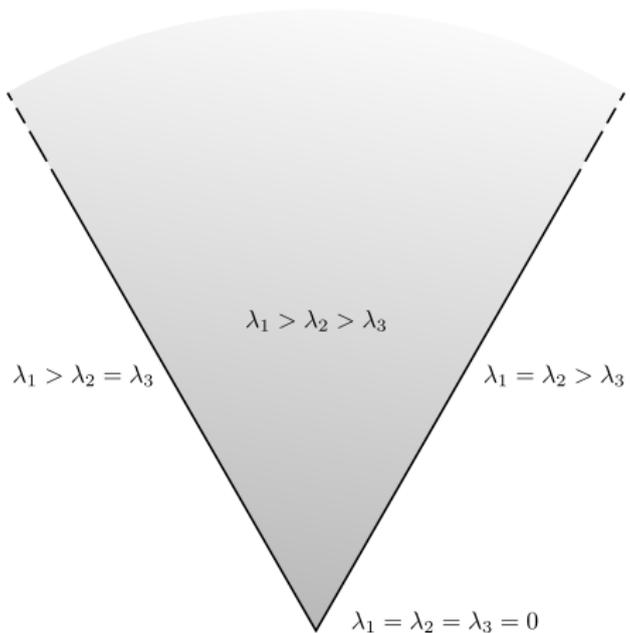
- Parce que les orbites sont en général de dimensions différentes.
- L'espace des orbites n'est pas une **variété lisse**



- C'est une variété **singulière**, avec un bord compliqué



Exemple : action de $SO(3)$ sur les déviateurs



Représentation géométrique de l'espace des orbites

- L'espace des orbites V/G peut être muni d'une structure semi-algébrique (i.e un sous ensemble de \mathbb{R}^N définie par un nombre fini d'égalités et d'inégalités polynomiales réelles).
- Plus explicitement, étant donné une base d'invariants polynomiaux :

$$\{J_1, J_2, \dots, J_N\},$$

l'application $J : V \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$$v \mapsto (J_1(v), J_2(v), \dots, J_N(v)),$$

induit un bijection entre l'espace des orbites V/G et $J(V) \subset \mathbb{R}^N$, qui est un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^N .

Méthode de Hermite

- Un problème classique est de **compter les racines réelles d'un polynôme réel**

$$p(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

- La solution suivante a été proposée par Hermite. Le nombre de **racines réelles distinctes** est égal à la **signature** de la matrice de Frankel

$$B(p) := (S_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$$

ou $S_k := \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k$ et les λ_i sont les racines de p .

- En particulier, **toutes les racines de p sont réelles ssi $B(p) \geq 0$.**

Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites

- Abud & Sartori (1983) puis Procesi & Schwarz (1985) ont généralisée la méthode de Hermite pour obtenir les inégalités qui décrivent l'image de $J(V/G)$ dans \mathbb{R}^N .
- On construit la **matrice de Gram** (ou Bezoutiant)

$$\gamma_{ij} = (\langle dJ_j, dJ_k \rangle)_{1 \leq j, k \leq N}$$

ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire G -invariant sur V .

- Alors γ s'exprime en fonction de $X := (J_1(v), \dots, J_N(v)) \in \mathbb{R}^N$ et

$$J(V/G) = \{X \in \mathbb{R}^N; \gamma(X) \geq 0\}.$$

Exemple : action de $SO(3)$ sur $S_2(\mathbb{R}^3)$

Une base d'invariants est donnée par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, les coefficients du polynôme caractéristique. Un point $p = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ appartient à l'image de $J = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ si et seulement si la matrice

$$B(p) := \begin{pmatrix} 3 & 2\sigma_1 & \sigma_2 \\ 2\sigma_1 & 2\sigma_1^2 - 2\sigma_2 & \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \\ \sigma_2 & \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 & -2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

est positive.

Les trois mineurs principaux de B , exprimés à l'aide des λ_i sont :

$$\begin{cases} \Delta_1 & = & 3, \\ \Delta_2 & = & (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2, \\ \Delta_3 & = & (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2. \end{cases}$$

Description algébrique des classes d'isotropies

H	$N(H)$	Γ^H	<i>Equations</i>	$\dim V^H$	$\dim \Sigma_{[H]}/G$
\mathbb{D}_2	\mathbb{O}	\mathfrak{S}_3	$\Delta_3 > 0, \Delta_2 > 0$	3	3
$O(2)$	$O(2)$	$\mathbb{1}$	$\Delta_3 = 0, \Delta_2 > 0$	2	2
$SO(3)$	$SO(3)$	$\mathbb{1}$	$\Delta_3 = 0, \Delta_2 = 0$	1	1

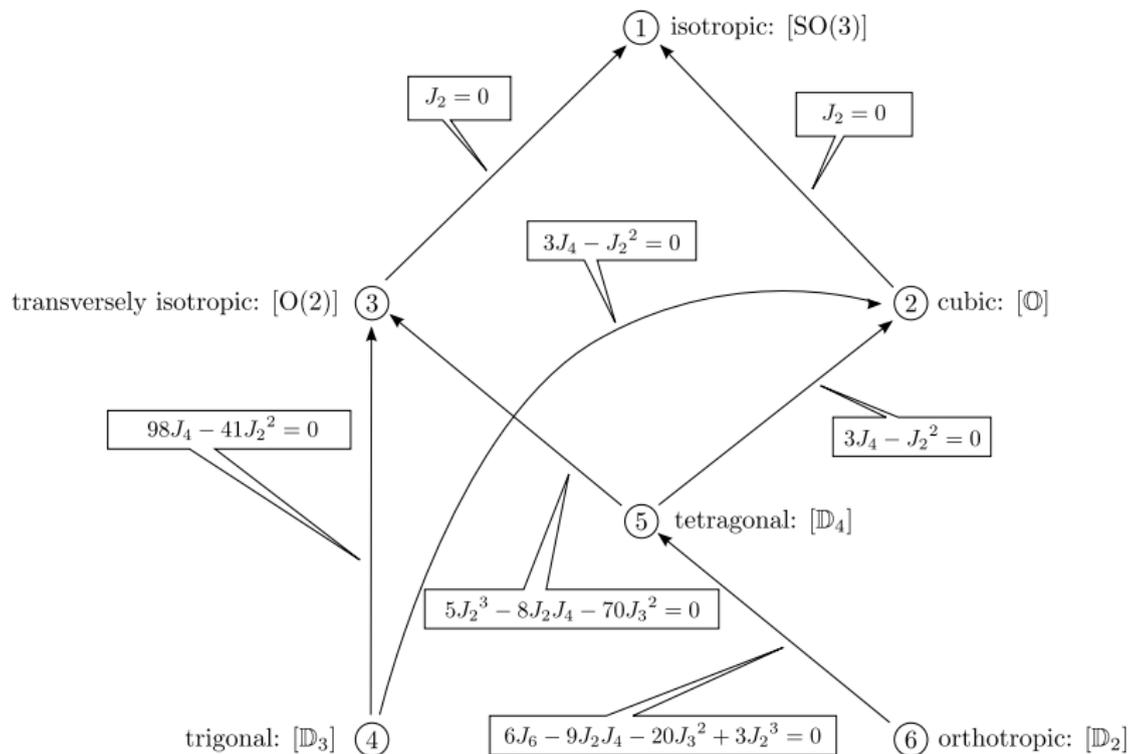
Application : caractérisation algébrique des classes de H^4

- A l'aide des invariants J_2, \dots, J_{10} , on a calculé les relations algébriques (équations et inéquations) définissant les strates à monodromie finie de \mathbb{H}^4 :

$$[\mathbb{D}_2], \quad [\mathbb{D}_3], \quad [\mathbb{D}_4], \quad [\text{SO}(2)], \quad [\mathbb{O}]$$

- On a donné une paramétrisation rationnelle de chacune de ces strates faisant intervenir au plus 6 invariants J_2, \dots, J_7 .
- On a construit un diagramme de bifurcation matérialisant les relations supplémentaires nécessaires pour passer d'une strate à une autre, plus petite.

Bifurcations pour les classes d'isotropies de \mathbb{H}^4



Lectures complémentaires I



H. Kraft and C. Procesi.

Classical Invariant Theory, a Primer.

Lectures notes available at <http://www.math.unibas.ch/~kraft/Papers/KP-Primer.pdf>, 2000.



P. J. Olver.

Classical invariant theory, volume 44 of *London Mathematical Society Student Texts*.

Cambridge University Press, Cambridge, 1999.



N. Auffray, B. Kolev and M. Petitot.

On Anisotropic Polynomial Relations for the Elasticity Tensor.

Journal of Elasticity, 115(1) :77–103, 2014.

Lectures complémentaires II



M. Olive.

About Gordan's algorithm for binary forms.

arXiv :1403.2283, 2014.