Invariants

Partie 1 : groupes

Boris Kolev

Université d'Aix-Marseille

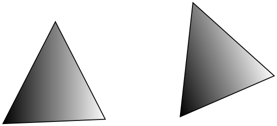
Nantes - 8 septembre 2014

Plan de l'exposé

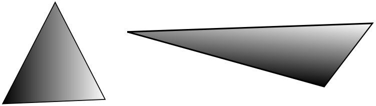
Plan de l'exposé

Ces triangles sont-ils les mêmes ?

- Ces triangles sont-ils les mêmes ?



- Et ceux-ci ?



Que veut dire "le même" ?

- "le même" est un terme vague mais les mathématiques permettent de lui donner un sens rigoureux, à l'aide de la notion de groupe.
- Ce terme "le même" devient alors relatif au groupe considéré.
- Dans la première figure les deux triangles se déduisent l'un l'autre par un déplacement euclidien. Dans la deuxième figure, non. Il se déduisent toutefois l'un l'autre si on considère le groupe des applications affines bijectives du plan.

Groupe

Définition

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition, notée $\star$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. la loi est associative : $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$, pour tout a, b, c dans G ;
2. il existe un élément neutre, noté e, i.e : $a \star e = e \star a = a$ pour tout a dans G ;
3. tout élément a de G possède un inverse, noté a^{-1}, i.e : $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Action d'un groupe sur un ensemble

Définition

Soit G un groupe et X un ensemble. Une opération de G sur X est une application $\varphi : G \to \mathcal{S}_X$, le groupe de toutes les bijections de X sur lui-même, telle que :

$$f(a \star b) = f(a) \circ f(b).$$

Remarque

Noter que nécessairement, on en déduit :

$$f(e) = id_X, \qquad f(g^{-1}) = f(g)^{-1}.$$

Notation : $\varphi(g)(x) = g \cdot x$

Jeu de lego

Étant donné une action d'un même groupe G sur deux ensembles X et Y, on peut en déduire d'autres actions de G :

- une action sur le produit cartésien $X \times Y$:

$$g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y),$$

- une action sur l'ensemble $\mathcal{A}(X, Y)$ des applications de X dans Y :

$$(g \cdot f)(x) := g \cdot f(g^{-1} \cdot x).$$

Remarque

Bien noter que si on ne prend pas l'inverse de g dans la deuxième occurence de g, on n'obtient pas une action !

Exemples en géométrie

1. Le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par permutation des coordonnées.
2. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(3)$ (transformations qui préservent le produit scalaire) agit naturellement sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ mais il agit aussi sur les matrices carrées : $g \cdot M := gMg^{-1}$ et plus généralement sur les tenseurs.
3. Le groupe des déplacements euclidiens $\mathbb{E}(3)$

$$g = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in SO(3), b \in \mathbb{R}^3,$$

agit sur $\mathbb{R}^3$: $g \cdot v = Av + b, v \in \mathbb{R}^3$.

Le groupe de Galilée

Le groupe de Galilée

$$g = \begin{pmatrix} A & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A \in SO(3), b, c \in \mathbb{R}^3, e \in \mathbb{R}$$

agit sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$: $g \cdot (r, t) = (Ar + bt + c, t + e)$ où $r \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$.

Remarque

Le groupe de Galilée est le groupe de la mécanique classique. Un des postulats fondamentaux de Newton stipule que les lois qui définissent le mouvement d'un système isolé sont invariantes par le groupe de Galilée.

Les groupes de Lorentz et Poincaré

- Le groupe de Lorentz $O(3,1)$ est le groupe des transformations linéaires qui préservent la forme quadratique
$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$
- Sa version affine est le groupe de Poincaré
$$g = \begin{pmatrix} L & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L \in O(3,1), b \in \mathbb{R}^4,$$
agit sur $\mathbb{R}^4$: $g \cdot v = Lv + b$ où $v := (r,t) \in \mathbb{R}^4$.
- Le groupe de Poincaré est le groupe de la mécanique classique relativiste. Si on ré-introduit la vitesse de la lumière c dans la définition de la forme quadratique, on peut montrer que le groupe de Galilée est une approximation à l'ordre $1/c^2$ du groupe de Poincaré.

Le programme d'Erlangen

- Pour Felix Klein (Programme d'Erlangen, 1872), une géométrie c'est un groupe :
  - groupe orthogonal $\mathrm{O}(3)$ pour la géométrie euclidienne,
  - groupe des bijections linéaires $\mathrm{GL}(3)$ pour la géométrie projective, ...
- Mais cette observation est valable également pour la physique :
  - groupe de Galilée pour la mécanique classique,
  - groupe de Poincaré pour la mécanique classique relativiste,
  - groupe des spineurs $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ pour la physique des fermions,
  - groupe des difféomorphismes pour la relativité générale,

  ...

Plan de l'exposé

Orbites, espace quotient

Définition

Étant donné une action d'un groupe G sur un ensemble X, la G-orbite d'un point $x \in X$ est le sous-ensemble

$$\mathcal{O}(x) := \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

C'est le sous-ensemble de tous les "mêmes" éléments que x.

Définition

L'ensemble de toutes les orbites est noté X/G est appelé espace quotient.

Remarque

Lorsqu'il n y a qu'une seule orbite, on dit que X est un espace homogène. Tous les éléments sont "les mêmes".

Exemple : les matériaux élastiques

- A chaque matériau élastique correspond un tenseur d'élasticité C mais la correspondance n'est pas univoque.
- La donnée explicite de C est relative au choix d'une orientation particulière du matériau dans l'espace, ce qui se traduit par une action du groupe $\mathrm{SO}(3)$ sur les tenseurs d'élasticité C.
- Un matériau est donc décrit par l'ensemble des "mêmes" tenseurs que C, i.e l'orbite du tenseur C sous l'action du groupe $\mathrm{SO}(3)$.
- L'ensemble des matériaux élastique c'est l'espace quotient (ou une partie de cet espace) et non pas l'espace des tenseurs.

Exemple : quotient d'un groupe par un sous-groupe

Définition

Soit G un groupe et H un de ses sous-groupes. H agit sur G de deux façons :

- à gauche : $h \cdot g := h \star g$,
- à droite : $h \cdot g := g \star h^{-1}$.

Remarque

Si H est distingué dans G (i.e : $gHg^{-1} \subset H$) alors G/H est lui-même un groupe.

Exemple

Le groupe des translations $\mathbb{T}(3)$ est un sous-groupe distingué du groupe des déplacements euclidiens $\mathbb{E}(3)$. Le quotient $\mathbb{E}(3)/\mathbb{T}(3)$ est isomorphe au groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$.

Sous-groupe d'isotropie

Définition

Étant donnée une action de G sur X, le sous-groupe d'isotropie (sous-groupe de symétrie, ou stabilisateur) d'un point $x \in X$ est :

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} .$$

Théorème

$$G_{g \cdot x} = gG_x g^{-1} .$$

Exemple

Considérons l'action naturelle du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$. Le sous-groupe d'isotropie de 0 est $\mathrm{SO}(3)$ lui-même ; le sous-groupe d'isotropie d'un vecteur v non nul est le sous groupe des rotations autour de l'axe engendré par v.

La formule des classes

Remarque

Chaque orbite $\mathcal{O}(x)$ est en bijection avec G/G_x.

Théorème (Formule des classes)

Si G et X sont finis et $\mathcal{O}_{x_1}, \dots \mathcal{O}_{x_n}$ désignent l'ensemble des orbites, alors

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} |G| \,/\, |G_{x_i}|$$

Remarque

Cette formule est très utile, elle permet par exemple de calculer l'ensemble des sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$.

Action d'un groupe sur ses sous-groupes

Définition

Soit G un groupe et $\mathcal{K}$ l'ensemble des sous-groupes de G. Alors G agit sur $\mathcal{K}$ de la manière suivante :

$$g \cdot H := gHg^{-1}, \quad g \in G, H \in \mathcal{K}.$$

Chaque orbite, notée $[H]$ est une classe de conjugaison. L'espace quotient correspond à l'ensemble des classes de conjugaison de G.

Remarque

Pour cette action, le sous-groupe d'isotropie d'un élément $H \in \mathcal{K}$ est noté $N(H)$ et appelé le normalisateur de H. C'est aussi le plus grand sous-groupe K de G dans lequel H est distingué. En particulier le quotient $N(H)/H$ est un groupe.

Plan de l'exposé

Ordre partiel sur les classes de conjugaison

Définition

Sur l'ensemble des classes de conjugaisons $\mathcal{K}/G$ on défini la relation suivante :

$$[H_1] \preceq [H_2], \quad \text{ssi il existe } g \in G \text{ tel que } \quad H_1 \subset gH_2g^{-1}.$$

Remarque

Cette relation définit-elle un ordre partiel sur les classes de conjugaison ? Il est clair que :

1. elle est reflexive : $[H] \preceq [H]$, pour toute classe $[H]$;
2. elle est transitive : $[H_1] \preceq [H_2]$ et $[H_2] \preceq [H_3]$ entraîne $[H_1] \preceq [H_3]$;
3. est-elle antisymétrique, i.e : $[H_1] \preceq [H_2]$ et $[H_2] \preceq [H_1]$ entraîne $[H_1] = [H_2]$?

Le théorème pour les groupes finis

Remarque

La question de l'antisymétrie se résume à établir que si $H \subset gHg^{-1}$, alors $H = gHg^{-1}$.

Théorème

Soit G un groupe fini. Alors $\preceq$ est un ordre partiel sur les classes de conjugaison.

Preuve

En effet, si $H \subset gHg^{-1}$ et que ces deux ensembles sont finis alors $H = gHg^{-1}$ puisqu'ils ont le même cardinal.

Le théorème pour les groupes compacts

Remarque

Pour un groupe infini quelconque, je ne sais pas si le résultat est vrai. Il y a toutefois une catégorie ”sympa” de groupes infinis, les groupes compacts (un groupe matriciel $G \subset M_n(\mathbb{R})$ est compact si il est fermé et borné).

Examples

Les groupes orthogonaux $O(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont compacts, le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas. Le groupe des translations ne l'est pas (fermé mais pas borné). Le groupe engendré par une rotation d'angle irrationnel ne l'est pas (borné mais pas fermé).

Théorème

Soit G un groupe compact. Alors $\preceq$ est un ordre partiel sur les classes de conjugaison des sous-groupes fermés.

Sous-groupes fermés de $\mathrm{SO}(3)$ à conjugaison près

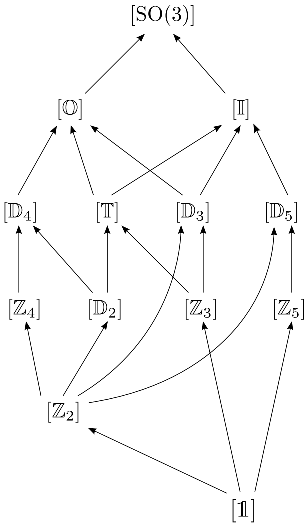
- $\mathrm{SO}(2)$: sous-groupe des rotations autour de l'axe z.
- $\mathrm{O}(2)$: engendré par $\mathrm{SO}(2)$ et le retournement $\sigma : (x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ autour de l'axe x.
- $\mathbb{Z}_n$: engendré par la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe z.
- $\mathbb{D}_n$: le groupe diédrale, engendré par $\mathbb{Z}_n$ et $\sigma : (x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$.
- $\mathbb{T}$: le sous-groupe de symétrie du tétraèdre, d'ordre 12.
- $\mathbb{O}$: le sous-groupe de symétrie du cube (ou de l'octaèdre), d'ordre 24.
- $\mathbb{I}$: le sous-groupe de symétrie de l'icosaèdre(ou du dodécaèdre), d'ordre 60.
- $\mathbb{1}$: le groupe réduit à l'identité.

Ordre partiel sur les classes de conjugaison

L'ordre partiel sur les classes de conjugaisons est donné par :

- $[\mathbb{Z}_n] \preceq [\mathbb{D}_n] \preceq [\mathrm{O}(2)]$ si $n \geq 2$;
- $[\mathbb{Z}_n] \preceq [\mathbb{Z}_m]$ si n/m ;
- $[\mathbb{D}_n] \preceq [\mathbb{D}_m]$ si n/m ;
- $[\mathbb{Z}_2] \preceq [\mathbb{D}_n]$ si $n \geq 2$;
- $[\mathbb{Z}_n] \preceq [\mathrm{SO}(2)] \preceq [\mathrm{O}(2)]$ si $n \geq 2$;

Cas des sous-groupes exceptionnels



Classes d'isotropie (ou types de symétrie)

Remarque

Si deux points sont sur la même orbite, alors leur sous-groupe d'isotropie sont conjugués. Mais la réciproque n'est pas vrai !

Contre-exemple

Pour l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ on a $[G_{v_1}] = [G_{v_2}]$ si v_1 et v_2 sont non nuls mais v_1 et v_2 ne sont pas sur la même orbite si $\|v_1\| \neq \|v_2\|$.

Définition (Classes d'isotropie)

Étant donnée une action d'un groupe G sur un ensemble X, les classes d'isotropie (ou types de symétrie) sont les classes de conjugaison des sous-groupes d'isotropie des points de X.

Exemples

Attention

Étant donnée une action de G sur X, déterminer quelles sont les classes de conjugaison de G qui sont des classes d'isotropie est un problème difficile pour lequel il n'existe pas de méthode générale. Un algorithme existe toutefois pour les représentations de $\mathrm{O}(3)$ et $\mathrm{SO}(3)$ (thèse de Marc Olive, 2014).

Exemples

1. Action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$: il y a deux classes d'isotropie $[\mathrm{O}(2)]$ et $[\mathrm{SO}(3)]$
2. Action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $S^2(\mathbb{R}^3)$: il y a trois classes d'isotropie $[\mathbb{D}_2]$, $[\mathrm{O}(2)]$ et $[\mathrm{SO}(3)]$

Plan de l'exposé

Invariants et covariants (définition)

Définition (Invariants)

Étant donnée une action de G sur X, les invariants sont les points fixes (les points dont l'orbite est réduite à un point) :

$$X^G := \{x \in X;\ g \cdot x = x, \forall g \in G\}.$$

Définition (Covariants)

Étant donnée une action de G sur X et Y, une application $f : X \to Y$ est un covariant si :

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \qquad \forall x \in X.$$

Les covariants sont donc les invariants de l'action de G sur $\mathcal{A}(X, Y)$:

$$\mathrm{Cov}_G(X, Y) = \mathcal{A}(X, Y)^G.$$

Invariants et covariants (remarques)

Remarque

Les covariants sont donc un cas particulier d'invariants.

Elements de language

Souvent, quand on parle d'invariant, on désigne une fonction (numérique) définie sur X, invariante par G

$$f(g \cdot x) = f(x).$$

C'est un cas particulier de covariant ou l'action de G sur Y est l'action triviale : $g \cdot y = y$.

Exemples

Aire d'un d'un parallélépipède

On considère l'action de $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$g \cdot (v_1, v_2) := (gv_1, gv_2), \quad g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

et l'action de G sur $Y = \mathbb{R}$ donnée par $g \cdot r := \det(g)r$. Alors l'aire du parallélépipède $(v_1, v_2) \mapsto \det(v_1, v_2)$ est un covariant.

Sous-groupe d'isotropie

Étant donné une action d'un groupe G sur un ensemble X et en considérant l'action de G sur l'ensemble de ses sous-groupes $\mathcal{K}$ (par conjugaison), alors l'application $x \mapsto G_x$ de X dans $\mathcal{K}$ est un covariant.

Remarque importante

Formes bilinéaires et applications linéaires

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agit sur les bases de $\mathbb{R}^n$.

- A : matrice (composantes) d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$.
  Par un changement de base P on a $A \mapsto PAP^{-1}$
- A : matrice (composantes) d'une forme bilinéaire de $\mathbb{R}^n$.
  Par un changement de base P on a $A \mapsto PAP^t$

Conséquence

Le déterminant et le polynôme caractéristique d'une application linéaire sont bien définis car indépendants du choix d'une base (invariants par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) mais pas ceux d'une forme bilinéaire.

Diagonalisation d'une forme quadratique

Confusion

Bien sûr, on peut choisir des bases dans lesquelles une forme quadratique est une somme de carrés mais ses valeurs propres et son déterminant n'ont pas de sens géométrique ; ce ne sont pas des invariants du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$!

Cas d'un espace euclidien

Dans un espace euclidien (produit scalaire fixé), une forme bilinéaire f peut être représentée par un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

$$f(v_1, v_2) = < av_1, v_2 > .$$

Mais attention, a et f n'ont les mêmes composantes (matrice) que dans une b.o.n.

Plan de l'exposé

Représentation linéaire

Définition

Une représentation linéaire (ρ, G, V) d'un groupe G sur un espace vectoriel V est une action linéaire de G sur V, autrement dit, c'est une application $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ telle que $\rho(a \star b) = \rho(a)\rho(b)$.

Remarque

- L'image de ρ, i.e $\{\rho(g) \in \mathrm{GL}(V);\ g \in G\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$;
- Le noyau de ρ, i.e $\{g \in G;\ \rho(g) = Id_V\}$ est un sous-groupe de G.
- Quand le noyau est réduit à l'élément neutre, on dit que la représentation est fidèle. Alors ρ représente G comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

Jeu de lego

Étant donné une action d'un groupe G sur deux espaces vectoriels V et W, on peut en déduire d'autres actions de G :

- une action de G sur le dual V^* (espace des formes linéaires sur V) :

$$(g \cdot \alpha)(v) := \alpha(g^{-1} \cdot v), \qquad \alpha \in V^*, \ v \in V$$

- une action sur le produit direct $V \bigoplus W$:

$$g \cdot (v \oplus w) := (g \cdot v) \oplus (g \cdot w), \qquad v \in V, \ w \in W$$

- une action sur le produit tensoriel $V \bigotimes W$:

$$g \cdot (v \otimes w) := (g \cdot v) \otimes (g \cdot w), \qquad v \in V, \ w \in W$$

Représentations tensorielles

Représentations tensorielles de $\mathrm{O}(3)$

Elle s'obtiennent à partir de l'action naturelle de $\mathrm{O}(3)$ sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit $g = (g_i^j) \in \mathrm{O}(3)$.

- Action de $\mathrm{O}(3)$ sur un tenseur d'ordre 2 : $a_{ij} \mapsto g_i^p g_j^q a_{pq}$
- Action de $\mathrm{O}(3)$ sur un tenseur d'ordre 3 : $t_{ijk} \mapsto g_i^p g_j^q g_k^r t_{pqr}$

Remarque

Le produit scalaire $q = (q_{ij})$ sur $\mathbb{R}^3$ induit un produit scalaire sur les tenseurs d'ordre supérieur et la représentation tensorielle préserve celui-ci. Par exemple sur les tenseurs d'ordre 2 :

$$< a, b >= q^{ij} q^{kl} a_{ik} b_{jl} = \mathrm{tr}(ab), \qquad (q^{ij}) = q^{-1}$$

Représentation de Voigt

On identifie $S^2(\mathbb{R}^3)$ avec $\mathbb{R}^6$ en choisissant la base

$$\begin{aligned} E_1 &= e_1 e_1, & E_2 &= e_2 e_2, & E_3 &= e_3 e_3, \\ E_4 &= e_2 e_3, & E_5 &= e_1 e_3, & E_6 &= e_1 e_2, \end{aligned}$$

de $S^2(\mathbb{R}^3)$ où $e_i e_j := (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)/2$ et (e_i) : b.o.n de $\mathbb{R}^3$.
Attention (E_m) n'est pas orthonormée.

On considère le tenseur d'élasticité C comme une forme bilinéaire symétrique sur $S^2(\mathbb{R}^3)$. Sa matrice dans la base (E_m) est obtenue en effectuant les substitutions

$$11 \to 1;\ 22 \to 2;\ 33 \to 3;\ 23; 32 \to 4;\ 13; 31 \to 5;\ 12; 21 \to 6.$$

sur les composantes C_{ijkl} de C.

Représentation de Kelvin (c.f. cours de M. François)

Représentation d'une forme bilinéaire

La forme bilinéaire C peut être représentée par une application linéaire auto-adjointe $\bar{C}$ de $S^2(\mathbb{R}^3)$: $C(a,b) =< \bar{C}a, b >$ qui peut être diagonalisée dans une b.o.n de $S^2(\mathbb{R}^3)$ (groupe $\mathrm{O}(6)$).

Représentation de Kelvin

Attention, les composantes de $\bar{C}$ et de C dans la base (E_m) ne coïncident pas car elle n'est pas orthonormée. Par exemple :

$$C_{14} = C(E_1, E_4) = \bar{C}_1^4 < E_4, E_4 >= \bar{C}_1^4/2.$$

La représentation de Kelvin consiste à utiliser de préférence la base orthonormée

$$e_1 e_1, \quad e_2 e_2, \quad e_3 e_3, \quad \sqrt{2} e_2 e_3, \quad \sqrt{2} e_1 e_3, \quad \sqrt{2} e_1 e_2.$$

Plan de l'exposé

Représentations irréductibles

Définition

Soit ρ une représentation d'un groupe G sur V. Un sous-espace W de V est invariant si $\rho(g)(W) \subset W$ pour tout $g \in G$.

Définition

La représentation V est irréductible si les seuls sous-espaces invariants de V sont $\{0\}$ et V.

Exemples

- La représentation naturelle de $\mathrm{O}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ est irréductible.
- La représentation tensorielle de $\mathrm{O}(3)$ sur $S^2(\mathbb{R}^3)$ n'est pas irréductible. Le sous-espace des déviateurs est invariant.

Représentations totalement réductibles

Définition

Une représentation V est totalement réductible si elle se décompose en une somme directe de représentations irréductibles.

Théorème

Si une représentation V possède un produit scalaire invariant, elle est totalement réductible (car si W est invariant $W^{\perp}$ aussi).

Exemple

Toute représentation de $\mathrm{O}(3)$ est totalement réductible. Les représentations irréductibles de $\mathrm{O}(3)$ sont les espaces de tenseurs harmoniques $\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^3)$ (c.f la décomposition harmonique, cours de N. Auffray).

Plan de l'exposé

Stratification isotropique

Soit V une représentation tensorielle de $G := \mathrm{O}(3)$.

- Il existe seulement un nombre fini de classes d'isotropie (qu'on peut calculer avec l'algorithme de Marc Olive).
- A chaque classe d'isotropie $[H]$, correspond une strate

$$\Sigma_{[H]} := \{v \in V \mid [G_v] = [H]\}\,.$$

Attention, ce n'est pas un sous-espace linéaire.

- La partition

$$V = \Sigma_{[H_0]} \cup \Sigma_{[H_1]} \cup \cdots \cup \Sigma_{[H_n]}$$

est la stratification isotropique de V.

Strate générique

Théorème

- *L'ensemble des classes d'isotropie possède un plus petit élément* $[H_0]$.
- *La strate* $\Sigma_{[H_0]}$ *(strate générique) est un ouvert dense de* V.

Remarque

Les vecteurs de $\Sigma_{[H_0]}$ ont l'isotropie minimale (qui n'est pas nécessairement triviale).

- Pour le tenseur d'élasticité, l'isotropie minimale est triviale.
- Pour $S^2(\mathbb{R}^3)$, l'isotropie minimale est $[\mathbb{D}_2]$.

Espaces de point fixes d'un sous-groupe

Définition

Soit H un sous-groupe de G, son ensemble de points fixes

$$V^H := \{v \in V \mid h.v = v, \quad \forall h \in H\}$$

est un sous-espace vectoriel de V.

Remarque

V^H est défini même si H n'est pas un sous-groupe d'isotropie. En élasticité, par exemple, les points fixes de $\mathbb{Z}_3$ et $\mathbb{Z}_4$ ont été considérés (ce qui est peut la source de l'erreur qui était de croire qu'il y avait 10 classes d'élasticité plutôt que 8).

Réduction de la représentation

Lemme

- *V^H est $N(H)$-invariant.*
- *Si H est un sous-groupe d'isotropie alors $N(H)$ est le sous-groupe maximal de G qui laisse invariant V^H.*

Corollaire

Si H est un sous-groupe d'isotropie, alors la restriction de la représentation

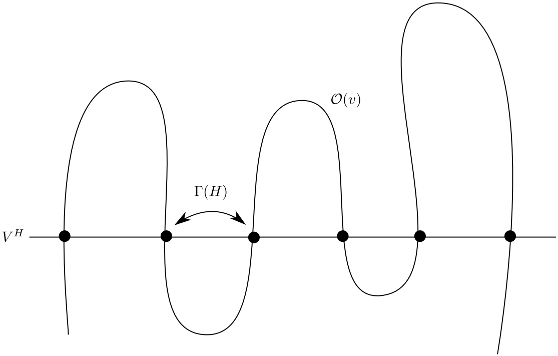
$$\rho_{/N(H)} : N(H) \longrightarrow \mathrm{GL}(V^H)$$

a pour noyau H. Elle induit donc une représentation fidèle de $\Gamma(H) := N(H)/H$ sur V^H.

Intersection des orbites avec V^H

Soit H un sous-groupe d'isotropie.

- Soit $v \in V$, alors $[H] \preceq [G_v]$ ssi l'orbite de v rencontre V^H.
- $\Sigma_{[H]} \cap V^H$ est la strate générique de V^H pour $\Gamma(H)$.
- Soit $v_1, v_2 \in V^H$. Alors v_1 et v_2 sont dans la même G-orbite ssi ils sont dans la même $\Gamma(H)$-orbite.



Tranches linéaires et monodromie

Définition

Une tranche linéaire pour la représentation V est un sous-espace vectoriel qui rencontre chaque orbite en un point au plus.

Soit H un sous-groupe d'isotropie.

- Si $\Gamma(H) = \mathbb{1}$ alors V^H intersecte chaque orbite de $\Sigma_{[H]}$ en un point unique, V^H est une tranche linéaire (ou transversale aux orbites) pour $\Sigma_{[H]}$.
- Si $\Gamma(H)$ est fini alors V^H intersecte chaque orbite de $\Sigma_{[H]}$ en un même nombre fini de points, qui sont permutés par $\Gamma(H)$. On peut considérer V^H comme une tranche linéaire multivaluée pour $\Sigma_{[H]}$ avec la monodromie $\Gamma(H)$.

Exemple

Représentation de $\mathrm{O}(3)$ sur les tenseurs symétriques d'ordre 2

- Le sous-espace des matrices diagonales Δ rencontre chaque orbite ;
- Δ correspond à l'espace des points fixes du sous-groupe $\mathbb{D}_2$ (qui correspond à l'isotropie minimale) ;
- $N(\mathbb{D}_2) = \mathbb{O}$ est le groupe du cube.
- La monodromie $\Gamma(\mathbb{D}_2) := N(\mathbb{D}_2)/\mathbb{D}_2 = \mathfrak{S}_3$ est le groupe symétrique à 3 éléments, qui permute les éléments diagonaux de Δ.
- L'orbite de toute matrice symétrique rencontre V^H qui est donc une tranche linéaire globale multivaluée (phénomène exceptionnel).

Commentaires

1. Un sous-espace V^H n'a un intérêt géométrique que lorsque H est un sous-groupe d'isotropie ;
2. Dans ce cas, un élément de V^H fournit un représentant privilégié pour chaque orbite de $\Sigma_{[H]}$;
3. Lorsque le groupe de monodromie est trivial, le point d'intersection d'une G-orbite avec V^H donne une forme normale pour cette orbite ;
4. Lorsque le groupe de monodromie est finie, on obtient une forme normale mais avec une ambiguïté (exemple : les valeurs propres ne sont définies qu'à une permutation près).

Normalisateurs des sous-groupes fermés de $\mathrm{SO}(3)$

- $N(\mathrm{SO}(3)) = \mathrm{SO}(3)$,
- $N(\mathrm{O}(2)) = \mathrm{O}(2)$,
- $N(\mathrm{SO}(2)) = \mathrm{O}(2)$,
- $N(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$,
- $N(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$,
- $N(\mathbb{T}) = \mathbb{O}$,
- $N(\mathbb{Z}_n) = \mathrm{O}(2)$ si $n \geq 2$ et $N(\mathbb{1}) = \mathrm{SO}(3)$,
- $N(\mathbb{D}_n) = \mathbb{D}_{2n}$ si $n \geq 3$ et $N(\mathbb{D}_2) = \mathbb{O}$.

$N(H)/H$ pour les sous-groupes fermés de $\mathrm{SO}(3)$

- $N(\mathrm{SO}(3))/\mathrm{SO}(3) = \mathbb{1}$,
- $N(\mathrm{O}(2))/\mathrm{O}(2) = \mathbb{1}$,
- $N(\mathrm{SO}(2))/\mathrm{SO}(2) = \mathbb{Z}_2$,
- $N(\mathbb{O})/\mathbb{O} = \mathbb{1}$,
- $N(\mathbb{I})/\mathbb{I} = \mathbb{1}$,
- $N(\mathbb{T})/\mathbb{T} = \mathbb{Z}_2$,
- $N(\mathbb{Z}_n)/\mathbb{Z}_n = \mathrm{O}(2)$ si $n \geq 2$ et $N(\mathbb{1})/\mathbb{1} = \mathrm{SO}(3)$,
- $N(\mathbb{D}_n)/\mathbb{D}_n = \mathbb{Z}_2$ si $n \geq 3$ et $N(\mathbb{D}_2)/\mathbb{D}_2 = \mathfrak{S}_3$.

Remarque

Tous les groupes quotients $N(H)/H$ sont finis sauf pour $H = \mathbb{Z}_n$.

Dimension des strates

Théorème

$$\dim \Sigma_{[H]} = \dim V^H + \dim G - \dim N(H)$$

Les éléments suivants peuvent être calculés *a priori*, ce qui rend la formule précédente utile en pratique :

1. $N(H)$ et $\Gamma(H) := N(H)/H$;
2. mais aussi la dimension de V^H.

Remarque

$|\Gamma(H)|$ est le nombre de points d'intersection d'une orbite d'un point de $\Sigma_{[H]}$ avec V^H. Il se calcule *a priori*. Le nombre $e_H := \dim G - \dim N(H)$ est parfois appelé dans la literature le nombre d'Euler.

Dimension de V^H pour $\mathrm{SO}(3)$

Soit $V = \alpha_0 \mathbb{H}^0 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \mathbb{H}^n$ (décomposition harmonique) :

$$\dim V^{\mathbb{Z}_p} = 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left[\frac{k}{p}\right] + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$$

$$\dim V^{\mathbb{D}_p} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left[\frac{k}{p}\right] + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_{2k}$$

$$\dim V^{\mathbb{T}} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(2\left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] - k + 1\right)$$

$$\dim V^{\mathbb{O}} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] - k + 1\right)$$

$$\dim V^{\mathbb{I}} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\left[\frac{k}{5}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] - k + 1\right)$$

Plan de l'exposé

Le tenseur d'élasticité

- Le tenseur d'élasticité $C = (C^{ijkl})$ est un tenseur du quatrième ordre possédant les symétries :

$$C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk}.$$

- Dans le cas d'une loi de comportement réversible (matériaux hyper-élastiques), on a la symétrie supplémentaire :

$$C^{ijkl} = C^{klij}.$$

- On note $\mathbb{E}\mathrm{la} := S_2 S_2 \mathbb{R}^3$, cet espace de tenseurs (dimension 21).

Les matériaux élastiques

Action du groupe $\mathrm{SO}(3)$

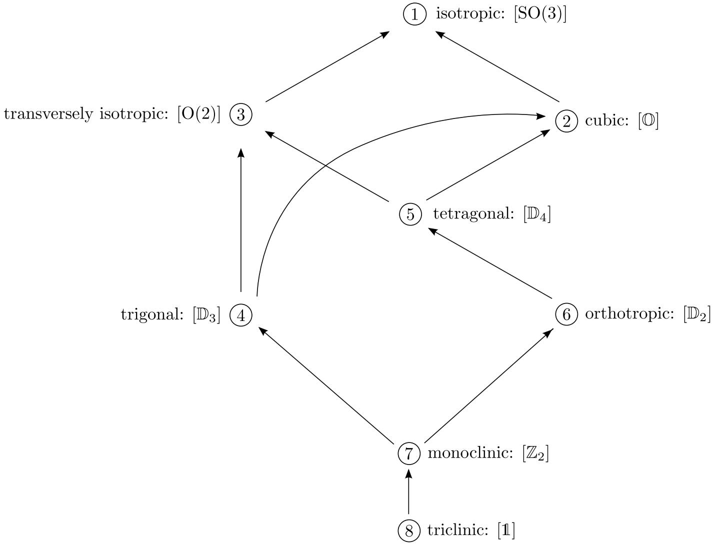
Le groupe orthogonal $\mathrm{SO}(3)$ agit linéairement sur l'espace des tenseurs d'élasticité $\mathbb{E}\mathrm{la}$

$$C^{pqrs} \mapsto C^{ijkl} = g_i^p\, g_j^q\, g_k^r\, g_l^s\, C^{pqrs}.$$

Espace des orbites

A chaque matériau correspond un tenseur C mais la correspondance n'est pas univoque. Un tenseur C est relatif au choix d'une orientation particulière du matériau dans l'espace. Les matériaux élastiques sont paramétrés par les orbites de la représentation linéaire de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{E}\mathrm{la}$.

Types d'isotropie pour l'élasticité (Forte-Vianello 1996)



Commentaires

- Il n y pas d'algorithme général pour déterminer les classes d'isotropie d'une représentation quelconque.
- Il est toutefois extrêmement surprenant pour un matheux que la détermination du nombre exacte de classes d'isotropie du tenseur d'élasticité n'ait été résolue définitivement qu'en 1996 par Forte-Vianello (manque de communication entre matheux et mécanos ?)
- Un algorithme a finalement été développée par Auffray-Olive pour déterminer les classes d'isotropie de n'importe quelle représentation tensorielle de $\mathrm{O}(3)$ et $\mathrm{SO}(3)$. Ceci met un terme définitif à des "questions ouvertes" sur la détermination des isotropies pour d'autres lois de comportement faisant intervenir ces groupes.

Classes d'isotropie de $\mathbb{E}\mathrm{la}$ et leur monodromie

H	$N(H)$	Γ^H	card Γ^H	dim V^H	dim $\Sigma_{[H]}$	dim $\Sigma_{[H]}/G$
$\mathbb{1}$	$\mathrm{SO}(3)$	$\mathrm{SO}(3)$	∞	21	21	18
$\mathbb{Z}_2$	$\mathrm{O}(2)$	$\mathrm{O}(2)$	∞	13	15	12
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{O}$	$\mathfrak{S}_3$	6	9	12	9
$\mathbb{D}_3$	$\mathbb{D}_6$	$\mathfrak{S}_2$	2	6	9	6
$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_8$	$\mathfrak{S}_2$	2	6	9	6
$\mathrm{O}(2)$	$\mathrm{O}(2)$	$\mathbb{1}$	1	5	7	5
$\mathbb{O}$	$\mathbb{O}$	$\mathbb{1}$	1	3	6	3
$\mathrm{SO}(3)$	$\mathrm{SO}(3)$	$\mathbb{1}$	1	2	2	2

Lectures complémentaires I

C. Procesi.
Lie groups.
Universitext. Springer, New York, 2007.
An approach through invariants and representations.

S. Sternberg.
Group theory and physics.
Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

M. Olive.
Géométrie des espaces de tenseurs, une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus.
Thèse de Doctorat, 2014,
http://www.latp.univ-mrs.fr/~molive/