Anisotropie tensorielle et décomposition harmonique

N.Auffray

Laboratoire Modélisation et Système Multi-Echelles- Université Marnes-La-Vallée Paris-Est

September 8, 2014

Plan

Anisotropie en mécanique

Définition

On considère une matériaux $\mathcal{M}$ ainsi qu'une propriété physique $\mathcal{P}$. La propriété $\mathcal{P}$ est dite anisotrope si elle dépend de la direction.

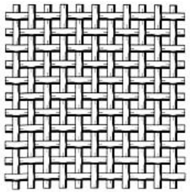
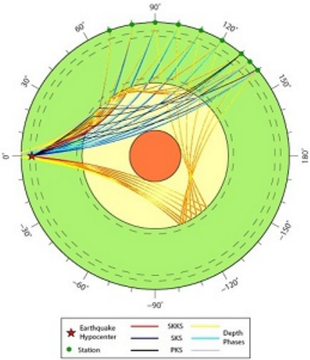
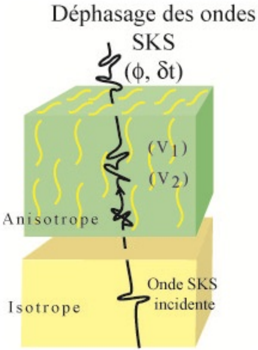


Figure: Un tissu . . . la réponse élastique, par exemple, dépend de la directions

L'Anisotropie c'est la vie: Géomateriaux

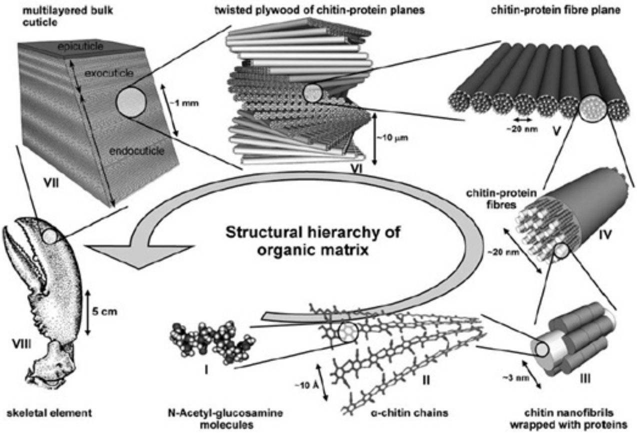
- **Le manteau terrestre**





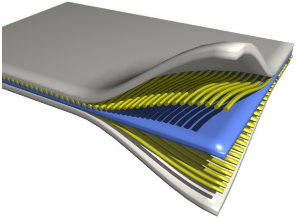
L'Anisotropie c'est la vie: Biomateriaux

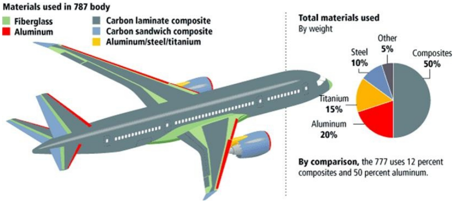
- **Bois, Os, Plantes...**



L'Anisotropie c'est la vie: Ingénierie (1)

- **Matériaux composites**





- **Capteurs**

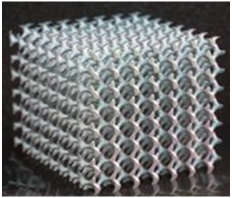
L'Anisotropie c'est la vie: Ingénierie (2)

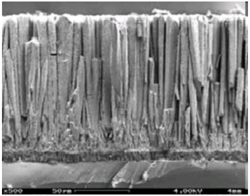
Ingénierie matériau :

- Création de matériaux architecturés;
- Étendre l'espace des matériaux.

Procédé de fabrication

- Comprendre les propriétés résultantes ;
- Piloter le procédé de fabrication.





Matériaux et anisotropie

Les matériaux étant souvent anisotropes, il est important de

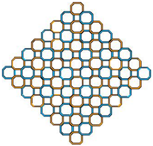
- mesurer cette anisotropie ;
- traduire ses conséquences en terme de loi de comportements ;
- d'identifier la forme générale des fonctions invariantes pour chaque type d'anisotropie possible (fonctions seuils par exemple)

Modélisation du problème

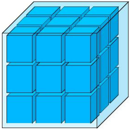
Anisotropie

Distinction entre anisotropie matérielle et physique.

Un milieu géométrique $\mathcal{M}$:



Une propriété physique $\mathcal{P}$:



Groupe de symétrie matérielle $\mathrm{G}(\mathcal{M}) = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{O}(3) | \mathrm{Q} \star \mathcal{M} = \mathcal{M}\}$

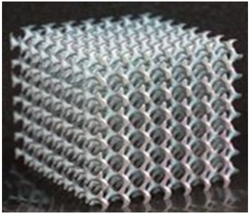
Groupe de symétrie physique $\mathrm{G}(\mathcal{P}) = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{O}(3) | \mathrm{Q} \star \mathcal{P} = \mathcal{P}\}$

Principe de Curie

"Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits."

$$\mathrm{G}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{G}(\mathcal{P})$$

Une question pour commencer ?



On considère un matériau qui a une symétrie cubique. Les comportements suivants sont ils isotropes ou anisotropes:

- Conduction thermique ?
- Conduction électrique ?
- Effet Piézoélectrique ?
- Élasticité ?

Question bonus: Un matériau élastique isotrope peut-il être thermiquement anisotrope ?

Plan

Diagramme de Tonti : Électrostatique [Ton13]

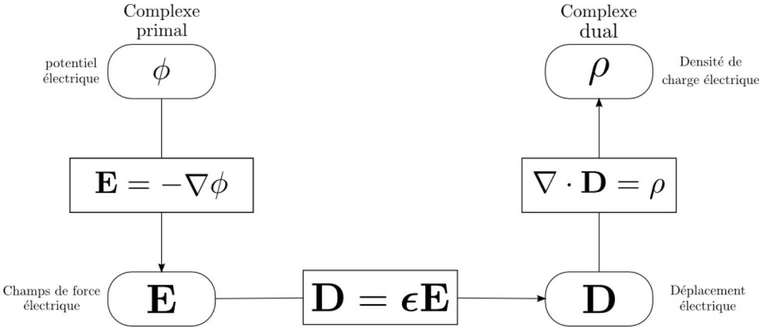


Diagramme de Tonti : Élasticité [Ton13]

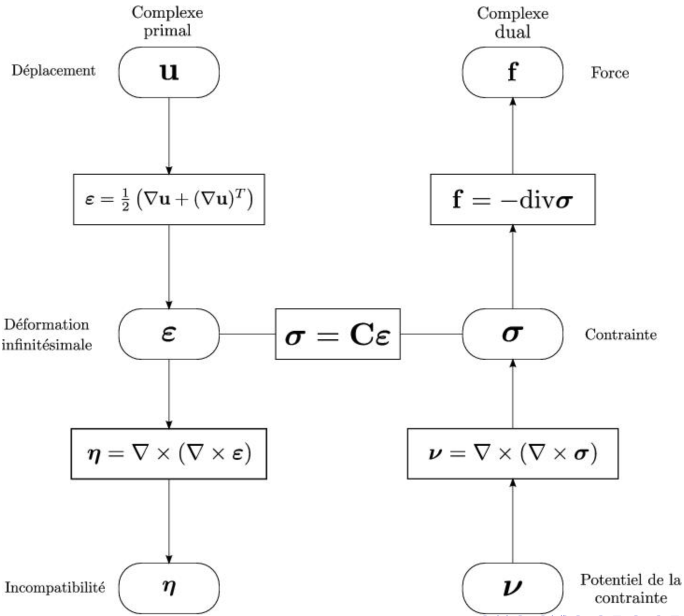


Diagramme de Tonti : Couplage électro-mécanique [Ton13]

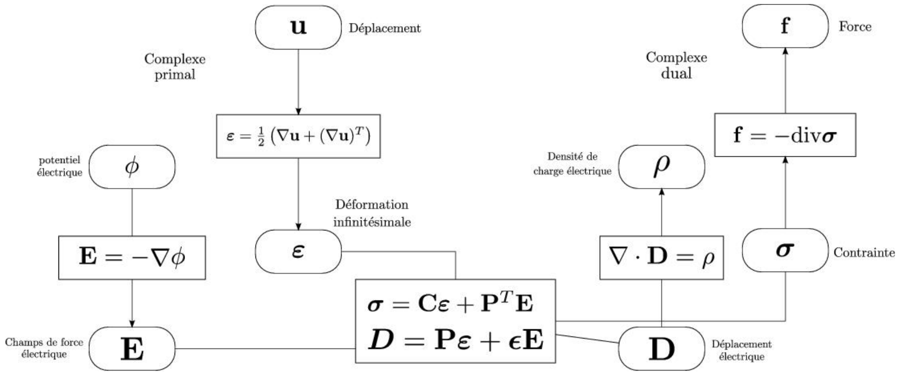
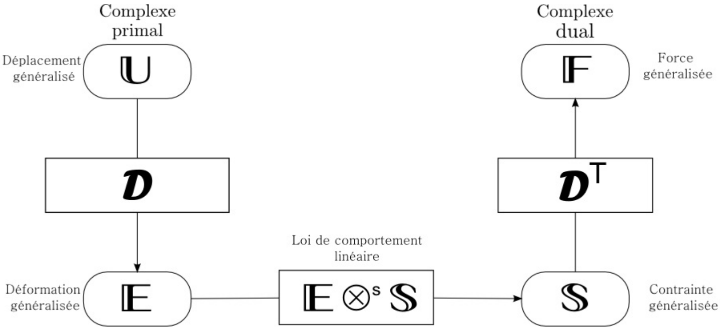


Diagramme de Tonti : Loi linéaire [Ton13, Nay11]



Exemples

Propriété	$\mathbb{E}$	$\mathbb{S}$	Produit tensoriel
Élasticité linéaire	$\mathbb{T}_{(ij)}$ (déformation)	$\mathbb{T}_{(ij)}$ (contrainte)	Symétrique
Piézoélectricité	$\mathbb{T}_{(ij)}$ (déformation)	$\mathbb{T}_{i}$ (déplacement électrique)	Standard
Élasticité du premier gradient	$\mathbb{T}_{(ij)k}$ (gradient de la déformation)	$\mathbb{T}_{(ij)k}$ (hyper contrainte)	Symétrique
Flexoélectricité	$\mathbb{T}_{(ij)k}$ (gradient de la déformation)	$\mathbb{T}_{i}$ (déplacement électrique)	Standard

Table: Lois de comportement et tenseurs d'état

Plan

Le tenseur d'élasticité

Loi de Hooke

En élasticité linéaire, on fait l'hypothèse d'une relation linéaire entre la contrainte σ et la déformation ε (loi de Hooke généralisée):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}.$$

Définition

- Le tenseur d'élasticité $C = (C_{ijkl})$ est un tenseur du quatrième ordre possédant les symétries suivantes:
$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$
- Dans le cas d'une loi de comportement réversible (matériaux hyper-élastiques), on a la symétrie supplémentaire:
$$C_{ijkl} = C_{klij}.$$
- On notera $\mathbb{E}\mathrm{la} := S_2 S_2 \mathbb{R}^3$, cet espace de tenseurs (dimension 21).

Classes de symétrie

Anisotropie

L'espace des tenseurs d'élasticité est divisé en 8 classes de symétrie [FV96]

	$\mathrm{G}_{\mathcal{M}}$	$\mathrm{G}_{\mathbb{E}\mathrm{la}_{\mathbb{C}}}$	dim
Triclinique	$[I]$	$[I]$	18
Monoclinique	$[Z_2]$	$[Z_2]$	12
Orthotrope	$[D_2]$	$[D_2$	9
Trigonale	$[Z_3, D_3]$	$[D_3]$	6
Tetragonale	$[Z_4, D_4]$	$[D_4]$	6
Iso. trans.	$[Z_{n>4}, D_{n>4}]$	$[\mathrm{O}(2)]$	5
Cubique	$[\mathcal{T}, \mathcal{O}]$	$[\mathcal{O}]$	3
Isotrope	$[\mathcal{I}, \mathrm{SO}](3)$	$[\mathrm{SO}(3)]$	2

Une constatation

Indignations

- On n'y comprend rien;
- Et pour un autre tenseur ?

Constatation

On a besoin d'un vocabulaire et d'outils spécifiques pour traiter de ces questions.

Plan

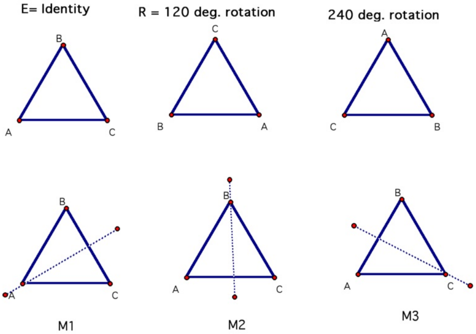
Notion de groupe

On va rappeler la définition de la structure algébrique de groupe.

Definition

Un groupe (fini) G est un ensemble d'éléments $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ muni d'une opération $\star$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- existence d'un élément neutre e tel que $\forall g_i \in G,\ \ g_i \star e = e \star g_i = g_i$;
- existence d'inverse : $\forall g_i \in G, \exists g_i^{-1} \in G, g_i \star g_i^{-1} = e$;
- fermeture pour $\star$: $\forall (g_i, g_j) \in G \times G, g_i \star g_j \in G$.



Petit exo

1. Combien il y a t'il d'éléments dans ce groupe
2. Que peut-on dire de $M_1 \star M_1 = M_1^2$?, $M_2 \star M_2 = M_2^2$? , $M_3 \star M_3 = M_3^2$?
3. Écrire une tableau qui résume l'ensemble des opérations du groupe.
4. Comment se comporte les rotations ?
5. L'ensemble des rotations forme t il un sous-groupe du groupe complet ?
6. Pouvez vous trouver d'autres sous groupes ?

Petit exo

Groupes continus

Definition

Un groupe continu G est une variété réelle pour laquelle les opérations de multiplication et d'inversion sont continues, i.e:

1. l'application multiplication est continue

$$\mu : G \times G \to G \quad \mu(x, y) = xy$$

2. l'application inversion est continue

$$\imath : G \times G \to G \quad \imath(x) = x^{-1}$$

On considère le groupe des matrices de rotation plane, noté $\mathrm{SO}(2)$:

$$\begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}.$$

Il est paramétré par un seul angle λ : sa variété est unidimensionnelle (un cercle). C'est bien un groupe car :

1. l'inverse d'un élément de paramètre λ est donné par l'élément de paramètre $-\lambda$
2. le produit des éléments de paramètres λ et μ est donné par l'élément de paramètre $\lambda + \mu$.

De manière plus générale

Groupe classique

- $\mathrm{GL}(d)$ est le groupe des transformations inversibles de E^d.
- $\mathrm{O}(d)$ est le groupe orthogonal de E^d, il est défini par

$$\mathrm{O}(d) = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}(d) | \mathrm{Q}^T = \mathrm{Q}^{-1}\}$$

  En pratique, $\mathrm{O}(d)$ contient

  1. le sous-groupe des rotations, $\mathrm{SO}(d)$, de déterminant $+1$;
  2. l'inversion I de déterminant -1.

- $\mathrm{SO}(d)$ est le groupe spécial orthogonal de E^d, il est défini par

$$\mathrm{O}(d) = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{O}(d) | \det Q = 1\}$$

  En pratique, $\mathrm{SO}(d)$ contient les rotations.

Plan

Point de départ: Rotation d'un tenseur d'élasticité

SO(3)-action

$\mathrm{SO}(3)$ agit sur $\mathbb{E}\mathrm{la}$ via l'opération $\star$ définie par:

$$\star : \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{E}\mathrm{la} \to \mathbb{E}\mathrm{la}\ ;\ (\mathrm{Q}, \mathrm{C}) \mapsto \mathrm{Q} \star \mathrm{C} := Q_{im} Q_{jn} Q_{ko} Q_{lp} C_{mnop}$$

avec

Définition

$\mathrm{SO}(3)$ est le groupe spécial-orthogonal de E^3, il est défini par

$$\mathrm{SO}(3) = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}(3) | \mathrm{Q}^T = \mathrm{Q}^{-1}\ \ \det(\mathrm{Q}) = 1\}$$

où $\mathrm{GL}(3)$ est le groupe des transformations inversibles de E^3.

Un matériau élastique: une SO(3)-orbite

Conjugaison

Deux tenseurs $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{E}\mathrm{la}$ sont dits $\mathrm{SO}(3)$-conjugués, si il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3)$ tel que $\mathrm{C}_2 = \mathrm{Q} \star \mathrm{C}_1$.

Orbite

L'ensemble des tenseurs de $\mathbb{E}\mathrm{la}$ $\mathrm{SO}(3)$-conjugués à C_1 constitue son $\mathrm{SO}(3)$-orbite. On note cela

$$\mathrm{SO}(3) \star \mathrm{C}_1 := \{\mathrm{C} = \mathrm{Q} \star \mathrm{C}_1 \mid \mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3)\}.$$

On définit l'espace d'orbite comme l'espace quotient $\mathbb{E}\mathrm{la}/\mathrm{SO}(3)$.

Remarque

- Un tenseur d'élasticité est relatif au choix d'une orientation particulière du matériau dans l'espace.
- Un matériau correspond à la donnée d'une orbite, c'est un point de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}/\mathrm{SO}(3)$.

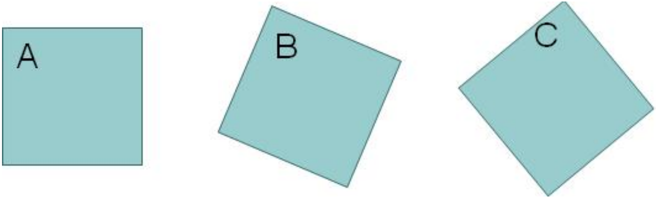
Groupe de symétrie

Groupe de symétrie

Pour tout tenseur C de $\mathbb{E}\mathrm{la}$, on caracterise l'ensemble des transformations g de $\mathrm{SO}(3)$ qui le laisse invariant

$$G(\mathrm{C}) := \{g \in \mathrm{SO}(3) \mid g \star \mathrm{C} = \mathrm{C}\}$$

Groupe de symétrie : Attention



Attention

La notion de groupe de symétrie est relative à une orientation ! Sur la figure ci-dessus les groupes de symétrie diffèrent (mais sont conjugués).

Une bonne notion

Pour comparer des groupes de symétrie, on doit introduire le concept de classes de symétrie

Classe de symétrie (1)

Des éléments situés sur une même orbite ont des groupes de symétries qui sont conjugués:

$$\mathrm{Orb}(\mathrm{C}_1) = \mathrm{Orb}(\mathrm{C}_2) \Rightarrow \exists g \in \mathrm{SO}(3) \mid G(\mathrm{C}_1) = gG(\mathrm{C}_2)g^{-1}$$

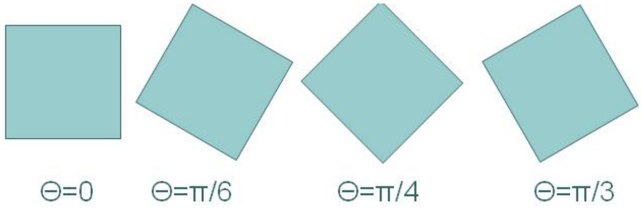


Figure: La classe $[D_4]$ regroupe les différents groupes de symétries

Définition

La classe de conjugaison d'un sous-groupe H de $\mathrm{SO}(3)$ se définie

$$[H] = \{H' \subset \mathrm{SO}(3) | \exists g \in \mathrm{SO}(3), H' = gHg^{-1}\}$$

La classe de symétrie $[H]$ est la classe de conjugaison du groupe de symétrie H.

Conséquences pratiques

- Tout tenseur d'élasticité possède un groupe de symétrie;
- Les tenseurs qui ont des groupes de symétrie conjugués appartiennent à la même classe;
- Les classes de symétrie partitionnent $\mathbb{E}\mathrm{la}$.

Plan

Les sous-groupes fermés de $\mathrm{SO}(3)$

La classe de symétrie d'un tenseur pair est conjugué à un sous groupe fermé de $\mathrm{SO}(3)$ [ZB94, FV96]:

Lemma

Chaque sous groupe fermé de $\mathrm{SO}(3)$ *est conjugué à un des éléments de la liste suivantes :*

$$\{\mathbb{1}, \mathrm{Z}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{SO}(2), \mathrm{O}(2), \mathcal{T}, \mathcal{O}, \mathcal{I}, \mathrm{SO}(3)\}$$

Physiquement on a des classes

planes $\mathbb{1}$, Z_n, D_n, $\mathrm{SO}(2)$, $\mathrm{O}(2)$ qui sont des sous-groupes de $\mathrm{O}(2)$;

spatiales $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{I}$ qui sont celles qui laissent invariantes les solides platoniciens.

Classes planes

- Z_n $(n \geq 2)$ le groupe cyclique d'ordre n, engendré par la rotation d'ordre n, $\mathbf{Q}(\mathbf{k} = \frac{2\pi}{n})$, et $\mathrm{SO}(2)$ le groupe infinitésimal associé;
- D_n $(n \geq 2)$ le groupe diédral d'ordre $2n$, engendré par Z_n ainsi que $\mathbf{Q}(\mathbf{i}; \pi)$, $\mathrm{O}(2)$ est le groupe infinitésimal associé.

Rot. order	1	2	3	4	5
Cyclic					
Dihedral					

Classes spatiales

Les classes spatiales sont: $\mathcal{T}$ le groupe tétraédrique , $\mathcal{O}$ le groupe octaédrique et $\mathcal{I}$ le groupe icosaédrique:

Théorème de Herman [Her45, Auf08b]

Un premier résultat bien pratique

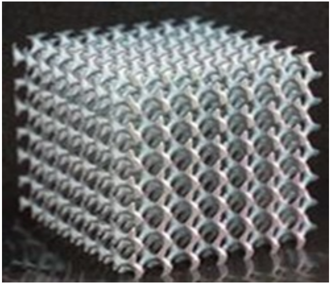
Théoreme

Soit T *un tenseur cartésien d'ordre* $2p$ *défini sur un domaine* D*. Si le groupe de symétrie de* D *contient* Z_m *avec* $m > 2p$ *alors* $G(\mathrm{T})$ *est au moins dans* $[\mathrm{SO}(2)]$.

Théoreme

Soit T *un tenseur cartésien d'ordre* $2p$ *défini sur un domaine* D*. Si le groupe de symétrie de* D *contient* D_m *avec* $m > 2p$ *alors* $G(\mathrm{T})$ *est au moins dans* $[\mathrm{O}(2)]$.

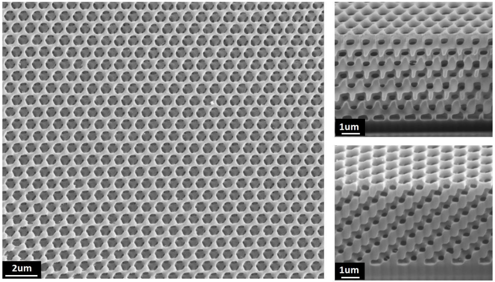
Une question pour commencer ?



On considère un matériau qui a une symétrie cubique. Les comportements suivants sont ils isotropes ou anisotropes:

- Conduction thermique ? Isotrope
- Conduction électrique ? Isotrope
- Effet Piézoélectrique ? Isotrope
- Élasticité ? Anisotrope

Une deuxième questions pour continuer ?



Un matériau périodique peut il être élastiquement isotrope ?

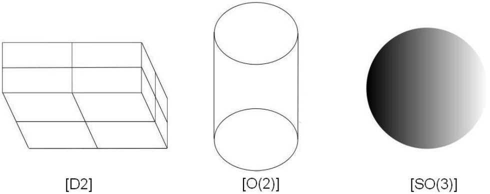
Plan

Tenseurs symétrique d'ordre 2

A partir du théorème spectrale

Classes de symétrie

Soit $T_{(ij)}$ un tenseur symétrique d'ordre 2 , alors $T_{(ij)}$ est soit: orthotrope ($[\mathrm{D}_2]$); isotrope transverse ($[\mathrm{O}(2)]$) ou isotrope ($[\mathrm{SO}(3)]$).



But...

Pour les tenseurs d'ordre supérieur, la détermination de l'ensemble des classes de symétrie n'est plus aussi directe.

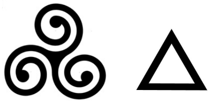
Classes de symétrie

Anisotropie

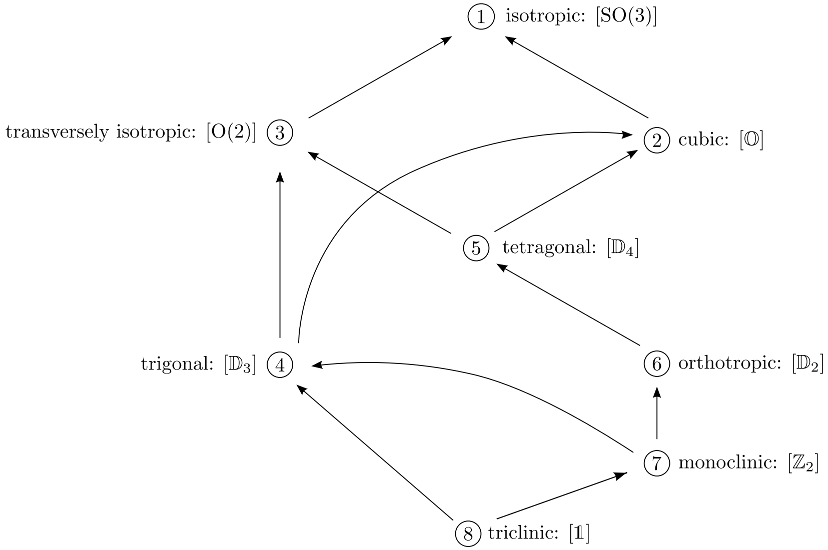
L'espace des tenseurs d'élasticité est divisé en 8 classes de symétrie [FV96]

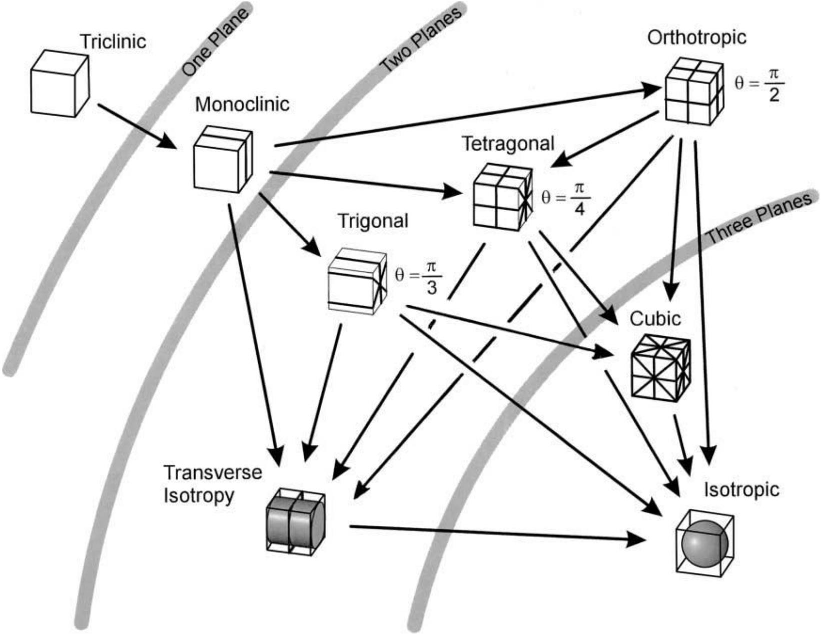
	$\mathrm{G}_{\mathcal{M}}$	$\mathrm{G}_{\mathbb{E}\mathrm{la}_{\mathbb{C}}}$	dim
Triclinique	I	I	21
Monoclinique	Z_2	Z_2	13
Orthotrope	D_2	D_2	9
Trigonale	Z_3, D_3	D_3	6
Tetragonale	Z_4, D_4	D_4	6
Iso. trans.	$Z_{n>4}, D_{n>4}$	$\mathrm{O}(2)$	5
Cubique	$\mathcal{T}, \mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	3
Isotrope	$\mathcal{I}, \mathrm{SO}(3)$	$\mathrm{SO}(3)$	2

- Z_n $(n \geq 2)$ cyclique;
- D_n $(n \geq 2)$ diédrale;
- tétraédrique $\mathcal{T}$;
- octaédrique $\mathcal{O}$;
- icosaédrique $\mathcal{I}$.



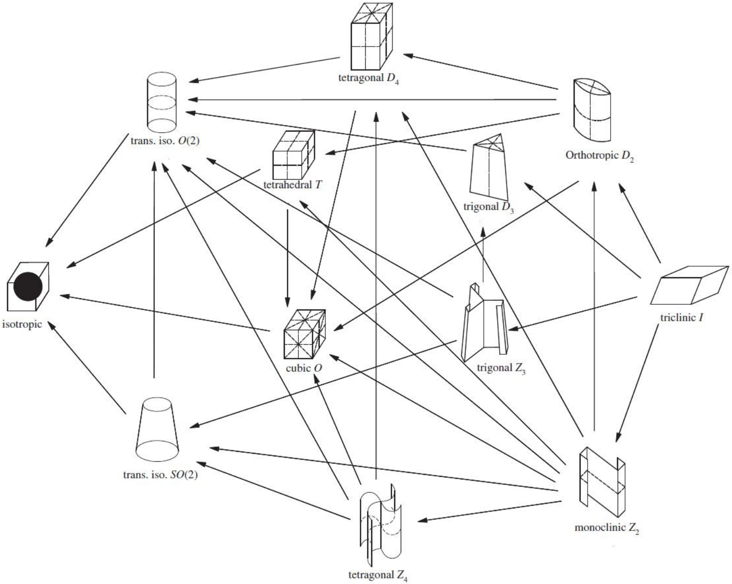
(a) Z_3 (b) D_3


1 isotropic: $[\mathrm{SO}(3)]$
transversely isotropic: $[\mathrm{O}(2)]$ 3
2 cubic: $[\mathbb{O}]$
5 tetragonal: $[\mathbb{D}_4]$
trigonal: $[\mathbb{D}_3]$ 4
6 orthotropic: $[\mathbb{D}_2]$
7 monoclinic: $[\mathbb{Z}_2]$
8 triclinic: $[\mathbb{1}]$



Triclinic
One Plane
Two Planes
Three Planes
Monoclinic
Orthotropic
$\theta = \frac{\pi}{2}$
Tetragonal
$\theta = \frac{\pi}{4}$
Trigonal
$\theta = \frac{\pi}{3}$
Cubic
Transverse Isotropy
Isotropic

Pour les tenseurs photoélectrique et fléxoélectrique on a [LQH11].



Quelques autres résultats

A partir de la méthode Forte et Vianello d'autres résultats ont été obtenus

Propriété	Tenseur	# classes	Action	Référence
Photoélasticité	$T_{(ij)(kl)}$	12	$\mathrm{SO}(3)$	[FV97]
Piezoélectricité	$T_{(ij)k}$	15	$\mathrm{O}(3)$	[GW02]
Fléxoélectricité	$T_{(ij)kl}$	12	$\mathrm{SO}(3)$	[LQH11]
Élasticité du second ordre	$T_{\underline{(ij)k}\ \underline{(lm)n}}$	17	$\mathrm{SO}(3)$	[Auf08a]

De manière plus générale, on peut montrer que, pour les tenseurs paires [OA13]

n	1	2	≥ 3
$\#\mathfrak{I}(\mathbb{S}^{2n})$	3	8	$2(2n+1)$
$\#\mathfrak{I}(\mathbb{G}^{2n})$	6	12	$4n+5$

et pour les tenseurs impaires [OA14]

n	1	2	≥ 3
$\#\mathfrak{I}(\mathbb{G}^{2n+1})$	17	29	$10(n+1)$
$\#\mathfrak{I}(\mathbb{G}_{\star}^{2n+1})$	16	28	$10n+9$

Méthodes disponibles

On trouve différentes approches dans la littérature:

Dimension des espaces invariants : A priori, la méthode ne permet pas de conclure;

Plan de symétrie [CVC01, Tin03] : Ne fonctionne que pour certain cas particulier;

Action complexe [BBS04] : Méthode ad-hoc, appliquée que pour l'élasticité à ce jour;

Décomposition spectrale [BBS07] : Applicable, mais ne permet pas de traiter les tenseurs de couplages;

Décomposition de Harmonique + Cartan [FV96] : Méthode assez calculatoire mais générale;

Méthode des multipôles de Maxwell [ZTP13] : Assez proche de la précédente;

Méthode des Clips [OA13, OA14] : Résultats généraux

Remarque

Le point commun aux trois dernières méthodes:

La décomposition harmonique

Plan

References I

- N. Auffray, *Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés*, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, Grenoble, 2008.
- ______, *Démonstration du théorème d'hermann à partir de la méthode forte-vianello*, Comptes Rendus Mécanique **336** (2008), no. 5, 458–463.
- A. Bona, I. Bucataru, and M.A. Slawinski, *Characterization of elasticity-tensor symmetries using su (2)*, 267–289.
- ______, *Coordinate-free characterization of the symmetry classes of elasticity tensors*, 109–132.
- P. Chadwick, M. Vianello, and S. C. Cowin, *A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight*, Proc. R. Soc. A **49** (2001), 2471–2492.
- S. Forte and M. Vianello, *Symmetry classes for elasticity tensors*, J. Elasticity **43** (1996), no. 2, 81–108.
- ______, *Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors*, International Journal of Engineering Science **35** (1997), no. 14, 1317 – 1326.
- G. Geymonat and T. Weller, *Symmetry classes of piezoelectric solids*, no. 10, 847–852.

References II

- B. Herman, *Some theorems of the theory of anisotropic media*, 89–92.
- H. Le Quang and Q. C. He, *The number and types of all possible rotational symmetries for flexoelectric tensors*, Proc. R. Soc. A **27** (2011), 393–417.
- B. Nayroles, *Mécanique des structures et dualité*, 2011.
- M. Olive and N. Auffray, *Symmetry classes for even-order tensors*, 177–210.
- ______, *Symmetry classes for odd-order tensors*, 421–447.
- T.C.T. Ting, *Generalized cowin-mehrabadi theorems and a direct proof that the number of linear elastic symmetries is eight*, 7129–7142.
- E. Tonti, *The mathematical structure of classical and relativistic physics*, Birkhauser Basel, 2013.
- Q.-S. Zheng and J.-P. Boehler, *The description, classification, and reality of material and physical symmetries*, Acta Mech. **102** (1994), 73–89.
- W.N. Zou, C.X. Tang, and E. Pan, *Symmetry types of the piezoelectric tensor and their identification.*, Proc. R. Soc. A **469** (2013).