

Invariants du tenseurs d'élasticité en 2D

G. de Saxcé

Ecole d'Eté MatSyMat

"Matériaux et Symétries Matérielles"

Fondements Géométriques de la MMC (3/3)

Nantes, 8-10 sept. 2014

- 1 Plan de l'exposé
- 2 Introduction
- 3 Paramétrisation de l'espace des tenseurs d'élasticité
- 4 Invariants du tenseur d'élasticité
 - Invariants joints
- 5 Structure de l'espace des tenseurs d'élasticité
- 6 Classes de matériaux
 - Classe de matériaux en élasticité anisotrope
 - Matériau monoclinique
 - Matériau orthotrope
 - Matériau tétragonal
 - Matériau isotrope
 - Interprétation géométrique des mesures invariants
- 7 Conclusions et perspectives

Origine du problème

- Programme PEPS Maths-ST2I 09-99 "Classification des matériaux élastiques et calcul des invariants"
- En élasticité, les matériaux sont décrits par les orbites de l'action du groupe des rotations sur l'espace des systèmes de coefficients élastiques. Leur description s'effectue par la détermination d'un système fini d'invariants polynomiaux qui séparent les orbites.
- Quoique le problème en 3D a déjà fait l'objet d'études, notamment par Pratz (1983), Cowin (1988), Boehler, Kirillov Jr et Onat (1993), Ostrasablin (1998), Bona, Bucataru et Slawinski (2008), l'ambition est de le résoudre de manière exhaustive.

Origine du problème

- **Objectif** : répondre à la question posée par Qi-Chang He
Comment identifier le comportement élastique d'un matériau anisotrope dont la symétrie matérielle est *a priori* inconnue ?
- Les retombées attendues sont nombreuses concernant les matériaux composites, biologiques et les géomatériaux.
- **Méthode** : "Qui peut le moins peut le plus". On commence par le cas 2D, intéressant *per se* et maquette pour le cas 3D.
- G. de Saxcé, C. Vallée, J. of Elasticity (2012)

Objectif

- Loi de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
- Espace $\mathbb{E}(d) = \mathbb{S}^2\mathbb{S}^2\mathbb{R}^d$ des systèmes de coefficients élastiques
 $C = (C_{ijkl})_{1 \leq i,j,k,l \leq d}$
- Pour la représentation linéaire de $\mathbb{SO}(d)$ dans $\mathbb{E}(d)$

$$C' = \rho(r)C \quad \iff \quad C'_{ijkl} = r_i^p r_j^q r_k^r r_l^s C_{pqrs} ,$$

- **Objectif** : Etude de la structure géométrique sous-jacente de l'espace quotient $\mathbb{E}la(d) = \mathbb{E}(d)/\mathbb{SO}(d)$, c'est-à-dire l'espace des orbites :

$$orb(C) = \{C' = \rho(r)C, \quad r \in \mathbb{SO}(d)\}$$

Démarche

- **Etape 1** : choix d'un système de paramètres faisant apparaître la décomposition en sous-espaces irréductibles
- **Etape 2** : détermination des invariants de l'orbite
- **Etape 3** : détermination de la structure géométrique sous-jacente de $\mathbb{E}la(2)$
- **Etape 4** : classes de matériaux et identification

Représentation de Kelvin

- en 2D :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & \sqrt{2}C_{2212} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & 2C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$



$$s = c e$$

- Notation suggérée par Kelvin, réintroduite et utilisée par Walpote, Rychlewski, François et Geymonat, Mohrabadi et Cowin
- Théorème** : dans la représentation de Kelvin, toute matrice orthogonale, $r \in \mathbb{O}(2)$ agit sur $\sigma \in \mathbb{S}^2\mathbb{R}^2$ comme une matrice orthogonale $R \in \mathbb{O}(3)$ agissant sur $s \in \mathbb{R}^3$.

Paramétrisation de l'espace des tenseurs de contraintes

- **Idée-clé** : le changement de variable $\tilde{s} = P^{-1}s$, avec $p = \frac{s_1+s_2}{\sqrt{2}}$,
 $\kappa' = \frac{s_1-s_2}{\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} p \\ \kappa' \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}.$$

- induit sur le tenseur d'élasticité le changement de variable

$$\tilde{c} = P^{-1} c P = \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \eta & \alpha \\ \eta & 2\gamma & -2\beta \\ \alpha & -2\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Paramétrisation de l'espace des tenseurs d'élasticité

- où apparaissent les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{1}{8} (c_{11} + c_{22} + 6c_{12} - 2c_{33}) ,$$

$$2\mu = \frac{1}{4} (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} + 2c_{33}) ,$$

- et les paramètres du déviateur du tenseur d'élasticité :

$$\eta = \frac{c_{11} - c_{22}}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{8} (2c_{33} + 2c_{12} - c_{11} - c_{22})$$

$$\alpha = \frac{c_{23} + c_{13}}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{c_{23} - c_{13}}{2\sqrt{2}} .$$

Décomposition en sous-espaces irréductibles

- Le choix des nouvelles variables révèle la décomposition irréductible :

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \\ \eta' \\ \alpha' \\ \gamma' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(2\theta) & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 4\theta & \sin 4\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 4\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \eta \\ \alpha \\ \gamma \\ \beta \end{pmatrix}$$

Invariants de chaque sous-espace irréductible

- Sous-espace \mathbb{E}_0 : un invariant λ
- Sous-espace \mathbb{E}'_0 : un invariant μ
- Sous-espace \mathbb{E}_2 : un invariant $I_2^2 = \eta^2 + \alpha^2$
- Sous-espace \mathbb{E}_4 : un invariant $I_4^2 = \gamma^2 + \beta^2$
- **Mais attention !** Quand $\text{SO}(2)$ agit sur $\mathbb{E}(2)$, L'orbite circulaire \mathcal{O}_4 dans \mathbb{E}_4 est parcouru deux fois plus vite que l'orbite circulaire \mathcal{O}_2 dans \mathbb{E}_2 (ces orbites sont "couplées")

Invariants joints

- Ce couplage est pris en compte par des invariants joints que l'on peut déterminer simplement en travaillant avec $z_2 = \eta + i \alpha$ et $z_4 = \gamma + i \beta$.
- On obtient un invariant complexe

$$\zeta = \frac{z_2^2}{z_4} I_4^2 = z_2^2 \bar{z}_4 = (\eta + i \alpha)^2 (\gamma + i \beta)$$
- **Mais attention !** Il est lié aux autres par $|\zeta|^2 = I_4^2 I_2^4$
- D'où deux invariants réels :

$$\zeta_r = \Re \zeta = 2\alpha\beta\eta + \gamma(\eta^2 - \alpha^2),$$

$$\zeta_i = \Im \zeta = 2\alpha\gamma\eta - \beta(\eta^2 - \alpha^2).$$

Structure de l'espace des tenseurs d'élasticité

- Si $I_2 > 0$ et $I_4 > 0$, les orbites (génériques) sont des lignes compactes. Leur ensemble \mathbb{E}/a_g , de dimension 5, peut être paramétrisé par les coordonnées $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_r)$ ou $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_i)$.
- Si $I_2 = 0$ et $I_4 > 0$, $\zeta_r = \zeta_i = 0$, les orbites sont des cercles de rayon I_4 . Leur ensemble est un volume \mathbb{E}/a_4 qui peut être paramétrisé par les coordonnées (λ, μ, I_4) .
- Si $I_2 > 0$ et $I_4 = 0$, $\zeta_r = \zeta_i = 0$, les orbites sont des cercles de rayon I_2 . Leur ensemble est un volume \mathbb{E}/a_2 qui peut être paramétrisé par les coordonnées (λ, μ, I_2) .
- Si $I_2 = I_4 = 0$, les orbites sont des points. Leur ensemble est une surface \mathbb{E}/a_{iso} paramétrisable par les coordonnées (λ, μ) .

Classe de matériaux en élasticité anisotrope

- Le stabilisateur d'un tenseur d'élasticité est appelé **groupe de symétrie**. A chacun correspond une **classe de matériaux**.
- Une méthode pour trouver les invariants consiste à étudier les stabilisateurs de $C \in \mathbb{E}(2)$, donc les sous-groupes fermés de $\mathbb{O}(2)$ (voir par exemple [J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, 1970]).
- **Idée-clé** : combiner cette méthode avec la représentation de Kelvin et la décomposition en irréductibles, ce qui permet de travailler dans un repère quelconque.
- On va pouvoir ainsi identifier le comportement élastique d'un matériau anisotrope dont la symétrie matérielle est *a priori* inconnue (problème de première importance en géotechnique).

Matériau monoclinique

- Un matériau dont le stabilisateur contient une réflexion par rapport à une droite Δ est dit être **monoclinique**.
- Si la normale à Δ est inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Ox_1 , la réflexion m_φ a une représentation de Kelvin de la forme

$$\tilde{M}_\varphi = P^{-1} M_\varphi P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -m_{2\varphi} \end{pmatrix} .$$

- On décompose \tilde{c} par bloc

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) & \tilde{v}^T \\ \tilde{v} & \tilde{A} \end{pmatrix} .$$

Matériau monoclinique

- L'action de la réflexion sur les coefficients élastiques s'écrit

$$\tilde{c}' = \tilde{M}_\varphi \tilde{c} (\tilde{M}_\varphi)^T = \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) & (-m_\varphi \tilde{v})^T \\ -m_\varphi \tilde{v} & m_\varphi \tilde{A} m_\varphi^T \end{pmatrix} .$$

- Le matériau est monoclinique si les coefficients élastiques sont invariants par une réflexion :

$$\tilde{v} = -m_\varphi \tilde{v} , \quad \tilde{A} = m_\varphi \tilde{A} m_\varphi^T ,$$

Matériau monoclinique

- d'où les relations :

$$\alpha = \tan(2\varphi) \eta , \quad \beta = \tan(4\varphi) \gamma . \quad (1)$$

- Eliminant φ entre les deux relations donne la condition pour qu'un matériau soit monoclinique

$$\zeta_i = 2\alpha\gamma\eta - \beta (\eta^2 - \alpha^2) = 0 . \quad (2)$$

- Si (2) est vérifiée, elles permettent de déterminer la valeur de φ donc le repère de symétrie s'il n'est pas connu *a priori*.

Matériau orthotrope

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 2 droites orthogonales est dit être **orthotrope**.
- Si les relations (1) sont satisfaites pour φ , elles le sont pour $\varphi + \pi/2$, ce qui montre en $2D$ qu'un matériau monoclinique est orthotrope.
- $\zeta_i = 2\alpha\gamma\eta - \beta (\eta^2 - \alpha^2)$ est une mesure **invariante** du défaut d'orthotropie.

Matériau tétragonal

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 4 droites obtenues par rotation successive de $\pi/4$ est dit être **tétragonal**.
- Un matériau orthotrope est tétragonal si $\alpha = \eta = 0$ (ou si $I_2^2 = \eta^2 + \alpha^2 = 0$), donc si :

$$c_{11} = c_{22} , \quad c_{23} = -c_{13} .$$

- Pour un matériau orthotrope, I_2 est une mesure invariante du défaut de tétragonalité.

Matériau isotrope

- Un matériau dont le stabilisateur est $\mathbb{O}(2)$ lui-même est dit être isotrope.
- Un matériau tétragonal est isotrope si $\gamma = \beta = 0$ (ou si $I_4^2 = \gamma^2 + \beta^2 = 0$).
- Pour un matériau tétragonal, I_4 est une mesure invariante du défaut d'isotropie.

Interprétation géométrique des mesures invariantes

- Normes invariantes $I_2^2 = \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2$ de \mathbb{E}_2 et $I_4^2 = \frac{1}{8} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{A}}^2)$ de \mathbb{E}_4 .
- ζ_i s'interprète comme une aire invariante.

En effet, si le matériau est monoclinique :

$$\tilde{\mathbf{v}} = -m_{2\varphi} \tilde{\mathbf{v}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} \text{ vecteur propre de } m_{2\varphi} \text{ de v.p. } -1.$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = m_{2\varphi} \tilde{\mathbf{A}} m_{2\varphi}^T \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}} \text{ vecteur propre de } m_{2\varphi} \text{ de v.p. } -1.$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \text{ et } \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}} \text{ sont donc collinéaires, soit : } \|\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{v}}\| = 0.$$

$$\text{On vérifie que : } \zeta_i^2 = \frac{1}{4} \|\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{v}}\|^2.$$

Conclusions et perspectives

- En $2D$, l'espace des tenseurs d'élasticité est une variété stratifiée dont les parties \mathbb{E}/a_g , \mathbb{E}/a_4 , \mathbb{E}/a_2 et \mathbb{E}/a_{iso} sont respectivement de dimensions 5, 3, 3 et 2.
- Il est paramétrisable par 5 coordonnées choisies parmi 6 invariants.
- Les 2 premiers sont des paramètres de la loi isotrope associée et les 3 autres sont des **mesures invariantes du défaut de symétrie** par rapport respectivement aux matériaux orthotropes, tétraogonaux et isotropes.
- L'étude est beaucoup plus aisée en utilisant la représentation de Kelvin et la décomposition en sous-espaces irréductibles.

Conclusions et perspectives

- Il n'est pas possible de caractériser le défaut de symétrie uniquement en termes de normes ou de distances invariantes en 2D (et *a fortiori* en 3D).
- Perspectives 1 : traiter le cas 3D.
- Perspectives 2 : étudier le lien entre la décomposition de Kelvin et la méthode des invariants du tenseur d'élasticité, tout d'abord en 2D.

Nombre d'invariants simples et joints

- Dimension de l'orbite : $\dim(\mathcal{O}(C)) = \dim(\mathbb{S}\mathbb{O}(2)) - \dim(\text{stab}(C))$
- Nombre d'invariants simples : $n_{inv}(\mathcal{O}_i) = \dim(\mathbb{E}_i) - \dim(\mathcal{O}_i)$
- Nombre d'invariants d'une orbite sur deux irréductibles :
 $n_{inv}(\mathcal{O}_{ij}) = \dim(\mathbb{E}_i \oplus \mathbb{E}_j) - \dim(\mathcal{O}_{ij})$.
 Nombre d'invariants joints : $n_{inv}(\mathcal{O}_{ij}) - n_{inv}(\mathcal{O}_i) - n_{inv}(\mathcal{O}_j)$

Conclusions et perspectives

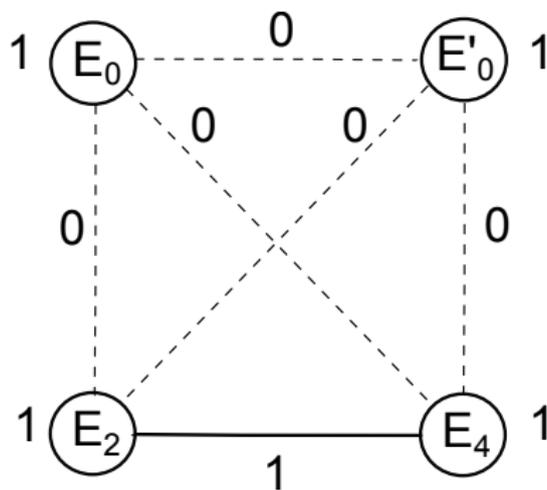


Figure: Cas 2D

Conclusions et perspectives

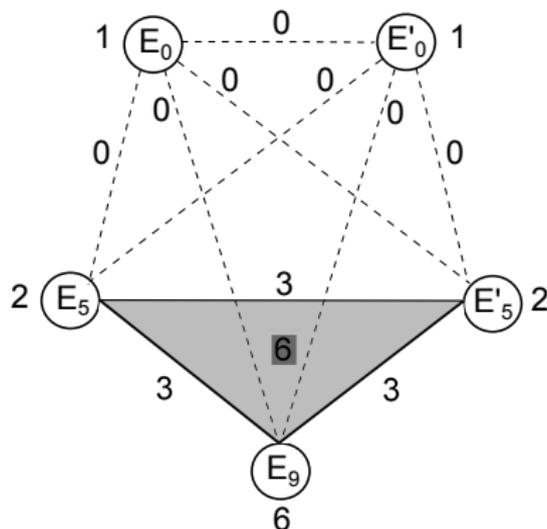


Figure: Cas 3D