Dynamique et thermodynamique Galiléenne des MC

G. de Saxcé

Ecole d'Eté MatSyMat

"Matériaux et Symétries Matérielles"

Fondements Géométriques de la MMC (2/3)

Nantes, 8-10 septembre 2014

Plan de l'exposé

1. Débat d'idées
   - Pourquoi travailler dans l'espace-temps ?
   - La gravitation, qu'est-ce que c'est ?
2. Tenseurs affines
3. Dynamique d'un milieu continu 3D
   - Torseur d'un MC
   - Tenseur de contrainte-masse
   - Équations d'Euler d'un MC
4. Thermodynamique pentadimensionnelle
   - Transformations Bargmanniennes
   - Tenseur moment
   - Premier principe
   - Second principe

Débat d'idées : pourquoi travailler dans l'espace-temps ?

On peut y voir plusieurs avantages, notamment pour :

- Écrire la **dérivée matérielle** d'une quantité q (scalaire ou vectorielle):

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial r} v = \frac{\partial q}{\partial X} U \ .$$

- Représenter le **transport** d'un scalaire par le quadriflux $q\,U$
- Modéliser sa **conservation** : $div_X\,(q\,U) = \frac{\partial q}{\partial t} + div\,(q\,v) = 0$

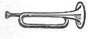
Rappel de la méthode de travail :

- Identifier les **groupe de symétrie**
- Identifier les composantes des tenseurs spatio-temporels (**covariants**)
- Déterminer une base d'**invariants** (complets et indépendants entre eux)

Débat d'idées : la gravitation, qu'est-ce que c'est ?

- Une variété est un objet qui ressemble locallement à $\mathbb{R}^n$ par le choix d'une carte $\mathbf{X} = \phi(X) \in \mathcal{M}$
- À toute variation dX des coordonnés on peut associer un **vecteur tangent**

$$\overrightarrow{d\mathbf{X}} = \frac{\partial \phi}{\partial X}\, dX = S_\phi dX$$

  ce qui défini une base $(\vec{\mathbf{e}}_i)$ de l'espace vectoriel tangent $T_{\mathbf{X}}\mathcal{M}$ comme image de la base canonique de $\mathbb{R}^n$
-  Il n'y a pas de méthode canonique pour différentier un vecteur sur une variété ! Une **différentielle covariante** est une application ∇ telle que :
  - si $\mathbf{X} \mapsto \vec{\mathbf{T}}(\mathbf{X})$ est un champ de vecteurs tangents et $\overrightarrow{d\mathbf{X}}$ est un vecteur tangent, $\nabla_{\overrightarrow{d\mathbf{X}}}\vec{\mathbf{T}}$ est un vecteur tangent,
  - il existe une matrice carrée $\Gamma(dX)$ linéaire en dX telle que :

$$\nabla_{\overrightarrow{d\mathbf{X}}}\vec{\mathbf{T}} = S_\phi \nabla_{dX} T \qquad avec \qquad \nabla_{dX} T = dT + \Gamma(dX)\, T$$

- Par exemple, la loi covariante du mouvement d'une particule peut être réécrite de manière intrinsèque :

$$\nabla_{\overrightarrow{d\mathbf{X}}}\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{H}}\ ,$$

  où $\vec{\mathbf{T}}$ est la quadri-impulsion et $\vec{\mathbf{H}}$ est le vecteur des autres forces

Tenseurs affines

Tenseurs affines

Objets dont les composantes sont modifiées par représentation du groupe affine $\mathbb{A}ff\,(n)$.

Les tenseurs classiques sont des tenseurs affines pour lesquels la transformation affine $a = (C, P)$ agit via sa partie linéaire P

Types les plus simples :

- **Points a** de l'espace tangent à la variété (perçu comme espace affine), de composantes V^α dans un repère affine $(\mathbf{a}_0, (\vec{\mathbf{e}}_i))$ et de règle tensorielle :

$$V^{\alpha'} = C^{\alpha'} + (P^{-1})^{\alpha'}_{\beta}\, V^{\beta}.$$

- **Fonctions numériques affines** sur cet espace, de composantes (Φ_α, χ) :

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{a}) = \Psi(V) = \chi + \Phi_\alpha\, V^\alpha$$

  et de règle tensorielle : $\Phi_{\alpha'} = \Phi_\beta P^{\beta}_{\alpha'}, \quad \chi' = \chi - \Phi_\beta\, P^{\beta}_{\alpha'}\, C^{\alpha'}$
  On peut écrire : $\mathbf{\Psi} = \chi\mathbf{1} + \Phi_i \mathbf{e}^i$ où $\mathbf{1}$ est la fonction de valeur 1 et avec la convention : $\mathbf{e}^i(\mathbf{a}) = \mathbf{e}^i(\overrightarrow{\mathbf{a}_0\mathbf{a}})$

Tenseurs affines : torseurs

Torseurs

Formes bilinéaires antisymétriques μ sur l'espace vectoriel des fonctions affines.

- Représentation locale :

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}) = \mu((\Phi_\alpha, \chi), (\hat{\Phi}_\beta, \hat{\chi})) = J^{\alpha\beta}\Phi_\alpha\hat{\Phi}_\beta + T^\alpha(\chi\,\hat{\Phi}_\alpha - \hat{\chi}\,\Phi_\alpha),$$

  avec $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$.

- Règle tensorielle pour les composantes $(T^\alpha, J^{\alpha\beta})$ du torseur μ :

$$T^{\alpha'} = (P^{-1})^{\alpha'}_{\beta}\, T^\beta$$

$$J^{\alpha'\beta'} = (P^{-1})^{\alpha'}_{\mu}\,(P^{-1})^{\beta'}_{\nu}\, J^{\mu\nu} + C^{\alpha'}\,((P^{-1})^{\beta'}_{\mu}\, T^\mu) - ((P^{-1})^{\alpha'}_{\mu}\, T^\mu)\, C^{\beta'}.$$

  ce qui n'est rien d'autre que la loi de transformation $\tilde{\mu}' = \tilde{P}^{-1}\tilde{\mu}\tilde{P}^{-T}$ d'un torseur !

- On peut étendre immédiatement le produit tensoriel aux tenseur affines et par exemple écrire le torseur d'une force $\vec{\mathbf{F}}$ au point $\mathbf{P}$:

$$\breve{\mu} = \mathbf{P} \otimes \vec{\mathbf{F}} - \vec{\mathbf{F}} \otimes \mathbf{P}$$

Tenseurs affines : différentielle covariante

- Une **différentielle covariante affine** est une application $\tilde{\nabla}$ telle que :
  - si $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{X})$ est un champ de points tangents et $\overrightarrow{d\mathbf{X}}$ est un vecteur tangent, $\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\mathbf{X}}} \mathbf{a}$ est un vecteur tangent,
  - il existe une différentielle covariante ∇ et $\Gamma_A(dX) \in \mathbb{R}^n$ linéaire en dX tels que :

$$\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\mathbf{X}}} \mathbf{a} = S_\phi \tilde{\nabla}_{dX} V \qquad avec \qquad \tilde{\nabla}_{dX} V = \nabla_{dX} V + \Gamma_A(dX) \ .$$

- On peut étendre cette différentielle aux tenseurs de tous types et, par exemple, réécrire de manière intrinsèque la loi covariante du mouvement d'un corps rigide :

$$\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\mathbf{X}}} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\star \ .$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est le torseur dynamique et $\boldsymbol{\mu}^\star$ est le torseur des autres forces

Dynamique d'un milieu continu 3D : torseur d'un MC

Torseurs à valeurs vectorielles

Pour un milieu continu vu comme une sous-variété de l'espace-temps décrite par un plongement $\mathcal{N} \to \mathcal{M} \,:\, \xi \mapsto X = f(\xi)$, on considère un torseur en $X = f(\xi)$ *à valeur vectorielle* dans l'espace vectoriel tangent en ξ à $\mathcal{N}$.

- Ses composantes $({}^{\gamma}T^{\alpha}, {}^{\gamma}J^{\alpha\beta})$ comportent donc un nouvel indice contravariant γ que nous placerons par convention à gauche.
- **Généralisation de l'équation du mouvement :** la *divergence affine* du torseur est nulle

$$
{}_{\gamma}\tilde{\nabla}\,{}^{\gamma}T^{\alpha} = {}_{\gamma}\nabla\,{}^{\gamma}T^{\alpha} = 0
$$

$$
{}_{\gamma}\tilde{\nabla}\,{}^{\gamma}J^{\alpha\beta} = {}_{\gamma}\nabla\,{}^{\gamma}J^{\alpha\beta} + {}_{\gamma}U^{\rho}\,\Gamma^{\alpha}_{\rho A}\,{}^{\gamma}T^{\beta} - {}^{\gamma}T^{\alpha}\,{}_{\gamma}U^{\rho}\,\Gamma^{\beta}_{\rho} = 0
$$

où :

$$
{}_{\beta}U^{\alpha} = \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}}, \qquad \text{et} \qquad \Gamma^{\alpha}_{A} = \Gamma^{\alpha}_{\rho A}\, d X^{\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\rho A}\,{}_{\gamma}U^{\rho}\, d\xi^{\gamma}
$$

Dynamique d'un milieu continu 3D : torseur d'un MC

dynamique d'un milieu continu 3D

Par convenance, on choisit $X^\alpha = \xi^\alpha$. La distinction entre indices à gauche et à droite n'est plus pertinente et nous les placerons tous à droite : ${}^\gamma T^\alpha = T^{\alpha\gamma}$ et ${}^\gamma J^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta\gamma}$.

Deux approches sont possibles :

- **Milieu de Cosserat :** aucune restriction sur les composantes $J^{\alpha\beta\gamma}$
- **Milieu de Cauchy :** on postule que $J^{\alpha\beta\gamma} = 0$ dans les repères affines dont l'origine mobile est au point X. En vertu du principe général :

$$T^{\beta\alpha} = T^{\alpha\beta}$$

Dynamique d'un milieu continu 3D : tenseur de contrainte-masse

- Les $T^{\alpha\gamma}$ sont les composantes d'un tenseur classique 2 fois contravariant **T** symétrique de règle tensorielle :

$$T' = P^{-1}\, T\, P^{-T}$$

- pour un **tenseur Galiléen** de forme :

$$T = \begin{pmatrix} \rho & p^T \\ p & -\sigma_\star \end{pmatrix} ,$$

elle donne :

$$\rho' = \rho, \qquad p' = R^T(p - \rho\, u), \qquad \sigma'_\star = R^T\,(\sigma_\star + u\, p^T + p\, u^T - \rho\, u\, u^T)\, R$$

- **réduction :** $u = \dfrac{p}{\rho} \quad \Rightarrow \quad p' = 0 \quad$ et $\quad \sigma'_\star = R^T \sigma\, R \quad$ avec :
$\sigma = \sigma_\star + \frac{1}{\rho}\, p\, p^T$ tel que $\sigma' = R^T \sigma\, R$ qui peut être ramenée à sa forme diagonale $\sigma' = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ par le choix d'une rotation :

$$T' = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\sigma' \end{pmatrix} ,$$

Méthode du boost : considerons un changement de variables $X' \mapsto X$ avec un boost Galiléen $u = v$ et une rotation R qui donnent

$$\sigma_\star = \sigma - \rho\, v\, v^T$$

avec $\sigma = R\,\sigma'\,R^T$

Tenseur de contrainte-masse

Objet structuré en :

- **densité** ρ,
- **quantité de mouvement** p,
- **contraintes statiques de Cauchy** σ,

représenté par la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} \rho & p^T \\ p & \rho\, v\, v^T - \sigma \end{pmatrix}$$

On a identifié **4 invariants** : $\rho, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Dynamique d'un milieu continu 3D : équations d'Euler d'un MC

La forme covariante

$$_{\gamma}\nabla^{\gamma} T^{\alpha} = 0$$

des équations du mouvement donne :

Équations d'Euler des milieux continus

$$\frac{\partial}{\partial r^j}(\rho\, v^j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial r^j} \right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial r^j} + \rho\,(g^i - 2\,\Omega^i_j\, v^j).$$

où Ω^i_j sont les éléments de la matrice $j(\Omega)$.

Autres applications : dynamique des **coques** [de Saxcé & Vallée 2003]

Thermodynamique pentadimensionnelle : transformations Bargmanniennes

- **Débat d'idées :** pour une particule en mouvement rectiligne uniforme, les intégrales premières classiques –masse, impulsion et moment cinétique– sont des composantes du torseur dynamique mais il y a un absent notable, l'énergie cinétique :

$$e = \frac{1}{2}\, m \parallel v \parallel^2$$

pour la retrouver, l'idée est d'inventer une cinquième dimension

- On plonge l'espace-temps $\mathcal{M} \to \hat{\mathcal{M}} : \mathbf{X} \mapsto \hat{\mathbf{X}} = \hat{f}\,(\mathbf{X})$ dans un espace $\hat{\mathcal{M}}$ de dimension 5

- On construit un groupe de transformations affines $d\hat{X}' \mapsto d\hat{X} = \hat{P}\, d\hat{X}' + \hat{C}$ of $\mathbb{R}^5$ qui sont Galiléennes quand elles agissent sur l'espace-temps donc de la forme :

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ \Phi & \alpha \end{pmatrix} ,$$

où Φ et α doivent avoir une signification physique liée à l'énergie

- Or nous savons que, sous l'action d'un boost u et d'une rotation R, l'énergie se transforme comme suit :

$$e = \frac{1}{2}\, m \parallel u + R\, v' \parallel^2 = \frac{1}{2}\, m \parallel u \parallel^2 + m\, u \cdot (R\, v') + \frac{1}{2}\, m \parallel v' \parallel^2 \ .$$

Thermodynamique pentadimensionnelle : transformations Bargmanniennes

- Nous posons que la cinquième dimension est liée à l'énergie par :

$$dz = \frac{e}{m}\, dt = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 dt' + u^T R\, dr' + dz'$$

ce qui conduit à considérer les **transformations Bargmanniennes** agissant linéairement sur $\mathbb{R}^5$ par :

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & R & 0 \\ \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 & u^T R & 1 \end{pmatrix}$$

Elles forment un groupe appelé **groupe de Bargmann**

- La température se généralise sous la forme d'un pentavecteur :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta v \\ \zeta \end{pmatrix}$$

où $\beta = 1 \,/\, \theta$ est la température réciproque et ζ le potentiel de Planck.

- Le **tenseur friction** est le tenseur mixte 1 fois covariant et 1 fois contravariant :

$$\mathbf{f} = \nabla\, \mathbf{W}$$

Thermodynamique pentadimensionnelle : tenseur moment

Tenseur moment

Forme linéaire en $\hat{\mathbf{X}} = \hat{f}(\mathbf{X})$ à valeurs vectorielles dans l'espace vectoriel tangent en $\mathbf{X}$ à $\mathcal{M}$, donc des **tenseur mixtes** $\hat{\mathbf{T}}$ d'ordre 2,

- La règle tensorielle s'écrit matriciellement :

$$\hat{T}' = P\ \hat{T}\ \hat{P}^{-1}$$

- **Tenseurs moments galiléens :** représentés par une matrice 4×5 de la forme :

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & -p^T & \rho \\ k & \sigma_\star & p \end{pmatrix}$$

- La règle tensorielle restitue celles déjà connues de $\rho, p, \sigma_\star$ ainsi que :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - u \cdot p + \frac{\rho}{2} \parallel u \parallel^2, \qquad k' = R^T\left(k - \mathcal{H}' u + \sigma_* u + \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 p\right)$$

qui conduit à la **forme réduite** :

$$\hat{T}' = \begin{pmatrix} \mathcal{H}' & 0 & \rho \\ h' & \sigma' & 0 \end{pmatrix},$$

Thermodynamique pentadimensionnelle : tenseur moment

La **méthode du boost** révèle alors la forme générale d'un

tenseur moment Galiléen

Objet structuré en :

- **densité** ρ,
- **quantité de mouvement** p,
- **contraintes statiques de Cauchy** σ,
- **flux de chaleur** h,
- **énergie totale par unité de volume** $\mathcal{H}$

représenté par la matrice :

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & -\rho v^T & \rho \\ h + \mathcal{H} v - \sigma v & \sigma - \rho v v^T & \rho v \end{pmatrix}$$

Thermodynamique pentadimensionnelle : premier principe

Divergence du moment

Pentavecteur ligne $div\ \hat{T}$ tel que, pour tout champs lisse de pentavecteur $\hat{W}$:

$$div\ (\hat{T}\ \hat{W}) = (div\ \hat{T})\ \hat{W} + Tr\ \left(\hat{T}\ \frac{\partial \hat{W}}{\partial X}\right)$$

Forme covariante du premier principe

$$div\ \hat{T} = 0$$

- Il restitue les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ainsi que l'équation de **conservation de l'énergie** :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + div\ \ (h + \mathcal{H} v - \sigma v) = 0$$

- On en déduit l'équation de la chaleur classique.

Thermodynamique pentadimensionnelle : premier principe

Milieu réversible

Si ζ est une fonction lisse de C and W et des coordonnées lagrangiennnes s', alors il existe un tenseur moment $\hat{\mathbf{T}}_R$ défini par

$$T_R = U\,\Pi_R + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma_R v & \sigma_R \end{pmatrix}$$

avec

$$\Pi_R = -\rho\,\frac{\partial\zeta}{\partial W} \qquad \sigma_R = \frac{2\rho}{\beta}\,F\,\frac{\partial\zeta}{\partial C}\,F^T\ .$$

tel que

- ♢ $Tr\left(\hat{T}_R \nabla \hat{W}\right) = 0$
- ♡ $T_R\ U = -\rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial W}\ U\right)\ U$
- ♠ $\hat{T}_R = \begin{pmatrix} T_R & N \end{pmatrix}$ avec $N = \rho\,U$ représente un tenseur moment $\hat{\mathbf{T}}_R$
- ♣ $\hat{T}_R\ \hat{W} = \left(\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial W}\ W\right)\ N$

Thermodynamique pentadimensionnelle : premier principe

Le potentiel de Planck ζ est le prototype de fonctions scalaires appelés **potentiels thermodynamiques** et dérivés comme suit :

- La règle tensorielle pour le vecteur Bargmannien W conduit à $\zeta = \zeta_{int} + \frac{\beta}{2} \parallel v \parallel^2$ et à la définition de l'**énergie interne**

$$e_{int} = -\frac{\partial \zeta_{int}}{\partial \beta}$$

- Le quadrivecteur Galiléen $\vec{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{T}}_R \, \hat{\vec{\mathbf{W}}}$ est le quadriflux

$$\vec{\mathbf{S}} = \rho \, s \, \vec{\mathbf{U}} = s \, \vec{\mathbf{N}}$$

de l'**entropie spécifique**

$$s = \zeta_{int} - \beta \, \frac{\partial \zeta_{int}}{\partial \beta}$$

- l'**énergie libre** de **Hemholtz** $\psi = -\dfrac{1}{\beta} \, \zeta_{int} = -\theta \, \zeta_{int}$ permet de retrouver

$$-e_{int} = \theta \, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \psi, \qquad -s = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

Thermodynamique pentadimensionnelle : second principe

Décomposition additive du tenseur moment

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_R + \hat{\mathbf{T}}_I$$

en parties :

- réversible $\hat{\mathbf{T}}_R$ représentée par :

$$\hat{T}_R = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_R & -p^T & \rho \\ \mathcal{H}_R v - \sigma_R v & \sigma_R - v p^T & \rho v \end{pmatrix}$$

- irréversible $\hat{\mathbf{T}}_I$ représentée par :

$$\hat{T}_I = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_I & 0 & 0 \\ h + \mathcal{H}_I v - \sigma_I v & \sigma_I & 0 \end{pmatrix}$$

L'énergie se décompose en parties réversible et irréversible :
$\mathcal{H}_R = \rho \left(\frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 + e_{int} \right)$ avec l'énergie interne spécifique e_{int}
$\mathcal{H}_I = -\rho q_I$ avec la production spécifique d'entropie q_I

Thermodynamique pentadimensionnelle : second principe

Flêche du temps

Forme linéaire $\mathbf{e}^0 = dt$ représentée par la ligne invariante par transformation Galiléenne :

$$e^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme covariante du second principe

La **production locale d'entropie** d'un MC caractérisé par un vecteur température $\hat{\mathbf{W}}$ et un tenseur moment $\hat{\mathbf{T}}$ est positive ou nulle :

$$\Phi = \mathbf{Div}\ \left(\hat{\mathbf{T}}\ \vec{\hat{\mathbf{W}}}\right) - \left(\mathbf{e}^0(\mathbf{f}(\vec{\mathbf{U}}))\right)\ \left(\mathbf{e}^0(\mathbf{T}_I(\vec{\mathbf{U}}))\right) \geq 0$$

et s'annule si et seulement si le processus est réversible [de Saxcé & Vallée 2012]

Après quelques manipulations, on peut la mettre sous la forme classique de l'**inégalité de Clausius-Duhem**

$$\Phi = \rho\ \frac{ds}{dt} - \frac{\rho}{\theta}\ \frac{dq_I}{dt} + div\ \left(\frac{h}{\theta}\right) \geq 0$$

où s est l'entropie spécifique