Mécanique Galiléenne

G. de Saxcé

Ecole d'Eté MatSyMat

"Matériaux et Symétries Matérielles"

Fondements Géométriques de la MMC (1/3)

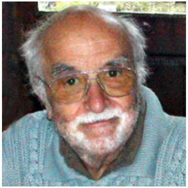
Nantes, 8-10 septembre 2014

Plan de l'exposé

" Les chaussures sont un outil pour marcher;
les mathématiques, un outil pour penser.
On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin."

`Jean-Marie Souriau`

`Grammaire de la Nature (2007)`



Débat d'idées

La Relativité Générale

n'est pas seulement une théorie de la gravitation qui se réduirait à prédire des effets ténus mais —peut-être surtout— est-elle un cadre de travail cohérent pour la mécanique des milieux continus.

Quelques idées-clefs :

- l'**espace-temps** muni d'une métrique qui en fait une variété riemannienne
- un **groupe de symétrie**, celui de Poincaré
- associée à ce groupe, une **connexion** qui s'identifie à la gravitation et dont les potentiels sont les 10 composantes de la métrique
- un **tenseur d'énergie-impulsion**, représentant la matière, de divergence nulle et généralisant le tenseur des contraintes
- son identification avec un tenseur lié à la **courbure** fournit les équations permettant de déterminer les 10 potentiels

Pour en savoir plus ...

`Souriau 1964 Géométrie et relativité`

Débat d'idées

Ce schéma est-il transposable à la mécanique classique ?

L'idée n'est pas nouvelle [Souriau 1970, Küntzle 1972, Duval 1985, Horváthy 1991].

Grands traits cette approche :

- **Travailler dans l'espace-temps** mais avec un **autre groupe de symétrie**, celui de Galilée
- Il ne conserve aucune métrique, ce qui ne permet plus de descendre ni de monter les indices tensoriels !
- La connexion associée, structurée en **gravité** g et **tournoiement** Ω, conduit à une forme **covariante** de l'équation du mouvement et possède 4 potentiels
- Les groupes de Galilée et de Poincaré sont deux sous-groupes du groupe affine, d'où l'idée de dégager les éléments communs aux théories classique et relativiste, la **mécanique affine**, [Souriau CFM 1997 Futuroscope]
- Elle s'articule autour du **torseur**, un tenseur affine 2 fois contravariant antisymétrique dont la divergence est nulle [de Saxcé & Vallée 2003]
- **Livre en préparation** avec **Claude Vallée :** Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua

Le principe de relativité de Galilée

- L'**espace-temps** $\mathcal{M}$, ensemble des évenements, est un espace de dimension 4. Un **événement** X est une occurence ponctuelle et instantanée représenté dans le repère d'un **observateur** par sa date t et sa position r

$$X = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix}$$

- Les transformations $X' \mapsto X$ préservant
  - les distances et les angles
  - les durées de temps
  - le mouvement rectiligne uniforme
  - les volumes orientés

  appelées **transformations galiléennes**, sont affines de la forme $X = P\,X' + C$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & R \end{pmatrix}$$

où $u \in \mathbb{R}^3$ et R est une rotation

Le principe de relativité de Galilée

Toute transformation galiléenne peut être obtenue en composant des transformations élémentaires:

- un **changement d'horloge** τ
- une **translation spatiale** k
- une **rotation** R
- une **vitesse d'entraînement** ou **boost galiléen** u

Principe de relativité de Galilée

L'énoncé des lois physiques de la mécanique classique est le même dans tous les systèmes de coordonnées spatio-temporelles qui se déduisent l'un de l'autre par une transformation galiléenne.

On dit que la loi est **covariante**

Le principe de relativité de Galilée

- L'espace-temps peut être perçu comme un espace affine
- Une mouvement d'une particule est décrit par sa trajectoire dans l'espace-temps, donc un milieu continu de dimension 1
- La quadrivitesse se transforme comme un vecteur

$$U = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v' \end{pmatrix},$$

  d'où la **formule de composition additive des vitesses** $v = u + R\, v'$
- L'ensemble $\mathbb{G}$ des transformations galiléennes est un sous-groupe du groupe $\mathbb{A}ff\,(4)$ appelé **groupe de Galilée**.
- Organisation des calculs (représentation linéaire du groupe affine $\mathbb{A}ff\,(4)$ dans $\mathbb{R}^5$)

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \qquad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ k & u & R \end{pmatrix}$$

  de telle sorte que $X = P\,X' + C$ devient une simple transformation linéaire $\tilde{X} = \tilde{P}\tilde{X}'$

Statique

Torseur des forces

Objet représenté dans un système de coordonnées par une matrice 4×4 antisymétrique

$$\breve{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & F^T \\ -F & -j(M) \end{pmatrix} ,$$

où $F \in \mathbb{R}^3$ est sa **force** et $M \in \mathbb{R}^3$ son **moment**, et dont les composantes sont modifiées suivant la loi

$$\breve{\mu} = \breve{P} \breve{\mu}' \breve{P}^T .$$

par les transformations Euclidiennes (Galiléennes restreintes à l'espace)

$$\breve{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & R \end{pmatrix} ,$$

Ce qui donne

- pour une translation $r' = r - r_0$, la **loi de transport du moment**
  $F' = F, \qquad M' = M + F \times r_0$
- pour une translation combinée à une rotation :
  $F' = R^T F, \qquad M' = R^T (M + F \times r_0)$

Dynamique des particules : torseur

Torseur dynamique

Objet représenté dans un système de coordonnées par une matrice 5×5 antisymétrique

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & T^T \\ -T & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m & p^T \\ -m & 0 & -q^T \\ -p & q & -j(l) \end{pmatrix}$$

où $T \in \mathbb{R}^4$, J est une matrice antisymétrique 4×4, et dont les composantes sont modifiées suivant la loi

$$\tilde{\mu} = \tilde{P}\tilde{\mu}'\tilde{P}^T$$

par les transformations Galiléennes $\tilde{X} = \tilde{P}\tilde{X}'$

Quelle est la signification physique des composantes si $m \neq 0$?

- Pour cela, appliquons la loi inverse $\tilde{\mu}' = \tilde{P}^{-1}\tilde{\mu}\tilde{P}^{-T}$:

$$m' = m, \qquad p' = R^T\,(p - m\,u)$$

$$q' = R^T\,(q - \tau'\,(p - m\,u)) + m'\,k', \qquad l' = R^T\,(l + u \times q) + k' \times (R^T(p - m\,u))$$

- puis essayons de trouver une forme réduite

Dynamique des particules : forme réduite

- **Rappel**

$$m' = m, \qquad p' = R^T\,(p - m\,u)$$

$$q' = R^T\,(q - \tau'\,(p - m\,u)) + m'\,k', \qquad l' = R^T\,(l + u \times q) + k' \times (R^T(p - m\,u))$$

- **Réduction** (forme quelconque $\longrightarrow$ forme réduite)
  - $u = \dfrac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p' = 0$ et $q' = R^T q + mk'$
  - $k' = -\dfrac{1}{m}\,R^T q \quad \Rightarrow \quad q' = 0$ and $l' = R^T\,l_0$ avec $l_0 = l - \dfrac{1}{m}\,q \times p$
  - on observe que $l'_0 = R^T\,l_0$
- On a identifié **2 invariants** : m et $\|\, l_0 \,\|$
- **Forme réduite**

$$\tilde{\mu}' = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j(l_0) \end{pmatrix}$$

- Nous affirmons qu'elle représente la particule **au repos** en $r' = 0$ à l'instant $t' = 0$

Dynamique des particules : méthode du boost

Méthode du boost (forme réduite $\longrightarrow$ forme quelconque) : considerons $X = PX' + C$ avec un boost Galiléen $u = v$ et une translation de l'origine $k = r_0$ donnant comme équation de la trajectoire : $r = r_0 + v\,t$ et les composantes:

$$p = m\,v, \qquad q = m\,r_0 = m\,(r - v\,t), \qquad l = l_0 + q \times v$$

d'où l'interprétation physique des composantes du torseur :

Torseur Galiléen

Objet structuré en :

- **quadri-impulsion** T, sous-structuré en :
  - **masse** m,
  - **impulsion** ou **quantité de mouvement** p,
- **quadri-moment** J, sous-structuré en :
  - **passage** q (car la particule passe en r_0 en $t = 0$)
  - **moment cinétique** l décomposé en **moment propre** l_0 et **moment orbital** $r \times mv$.

On a identifié **2 invariants** : masse m et spin $\| l_0 \|$ mais y en a-t-il d'autres ?

Parenthèse : groupe de symétrie

- Un **groupe** G est un ensemble muni d'une opération associative $G \times G : (a, b) \mapsto ab$ avec un élément neutre e et tel que chaque élément a un inverse.
- Un **groupe de symétrie** est un groupe G de transformations d'un ensemble $M \to M : x \mapsto x' = a \cdot x$. L'action est à gauche si $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ et à droite si $(ba) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- **Exemple** 1 : action à gauche du groupe des rotations $\mathbb{SO}(3)$ sur les vecteurs : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x' = R\,x$
- **Exemple** 2 : action à droite du groupe affine $\mathbb{A}ff(4)$ sur les torseurs : $\mathbb{M}^a_{5\times5} \to \mathbb{M}^a_{5\times5} : \tilde{\mu} \mapsto \tilde{\mu}' = \tilde{P}^{-1}\tilde{\mu}\tilde{P}^{-T}$
- L'**orbite** de x est le sous-ensemble $orb(x) = \{x' \in M \quad tel\ que \quad \exists a \in G, \quad x' = a \cdot x\}$
- Le **stabilisateur** de x est le sous-groupe : $stab(x) = \{a \in G \quad tel\ que \quad a \cdot x = x\}$

Parenthèse : groupe de symétrie

- Une **variété différentielle** de dimension n est un objet qui ressemble localement à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ mais dont la topologie globale peut être assez différente.
- Un **groupe de Lie** est une variété différentielle qui est aussi un groupe, telle que l'opération du groupe $(a', a) \mapsto a'a$ et l'inversion $a \mapsto a^{-1}$ sont des applications lisses.
- **Exemple :** le groupe de Galilée est un groupe de Lie de dimension 10.
- **Règle :** la dimension de l'orbite est : $dim(orb(x)) = dim(G) - dim(stab(x))$
- **Exemple 1 :** Action du groupe des rotations sur les vecteurs $x' = R\,x$
  - Orbites **génériques** $(x \neq 0)$: l'orbite est la sphère de rayon $\| x \|$. Le stabilisateur est composé des rotations d'axe x. La règle $dim(orb(x)) = 3 - 1 = 2$ restitue le fait que l'orbite est une surface
  - Orbite **singulière** $(x = 0)$: l'orbite est $\{0\}$. Le stabilisateur est constitué de toutes les rotations. La règle $dim(orb(x)) = 3 - 3 = 0$ restitue le fait que l'orbite est un point

Parenthèse : groupe de symétrie

- une **fonction invariante** (ou **invariant**) par un groupe de symétrie est une fonction constante sur les orbites
- **Dépendance fonctionnelle :** $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ invariantes et $h(y_1, \ldots, y_p)$ arbitraire $\Rightarrow \quad h'(x) = h(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ invariante.
- **Base fonctionnelle :** ensemble de fonctions invariantes indépendantes et générant toutes les fonctions invariantes
- **Règle :** le nombre d'invariants indépendants est : $n_{inv} = dim(M) - dim(orb(x))$
- **Exemple 1 :** Action $x' = R\,x$
  - Orbites **génériques** $(x \neq 0)$: la base contient $3 - 2 = 1$ invariant, par exemple $\parallel x \parallel$. Tous les autres invariants sont de la forme $h\,(\parallel x \parallel)$.
  - Orbite **singulière** $(x = 0)$: la base contient $3 - 0 = 3$ invariant. Les invariants de la base sont par exemple $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Application : Action du groupe de Galilée sur les torseurs

- Orbites **génériques** (m et $\| l_0 \| \neq 0$) : particules à spin
    - Le stabilisateur de $\tilde{\mu}$ est l'ensemble des transformation Galiléenne vérifiant $\tilde{\mu} = \tilde{P}\tilde{\mu}\tilde{P}^T$ et $l_0 = R^T l_0$
    - $u = \frac{1}{m}(p - R\,p)$ stabilise p et $k' = \frac{1}{m}(q - R^T q + \tau' p)$ stabilise q
    - Donc le stabilisateur est constitué des changements d'horloges τ et des rotations d'axe l_0. La dimension de l'orbite est $10 - 2 = 8$. Le nombre d'invariant indépendants est bien $10 - 8 = 2$. Il n'y a pas d'autres invariants que ceux dépendants de m et $\| l_0 \| \neq 0$
- Orbites **singulières** ($m \neq 0$ et $\| l_0 \| = 0$) : particules massives sans spin. Le stabilisateur est constitué des changements d'horloges τ et de toutes les rotations. La dimension de l'orbite est $10 - 4 = 6$. Le nombre d'invariant indépendants est bien $10 - 6 = 4$. La base fonctionnelle est constituée de m et des 3 composantes de $l_0 = 0$
- Autres orbites **singulières** : particules sans masse ...

Dynamique des particules : systèmes de coordonnées Galiléennes

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice jacobienne $P = \frac{\partial X'}{\partial X}$ d'un changement de coordonnées $X \mapsto X'$ soit une transformation galiléenne linéaire est que ce changement est constitué d'un **déplacement rigide** et d'un changement d'horloge :

$$r' = (R(t))^T (r - r_0(t)), \qquad t' = t + \tau_0$$

La vitesse d'entraînement est alors de la forme : $u = \varpi(t) \times (r - r_0(t)) + \dot{r}_0(t)$ où ϖ est le vecteur de Poisson de la rotation $R(t)$

- **Preuve :** Chercher les conditions d'intégrabilité du système $P = \frac{\partial X'}{\partial X}$ (Frobenius)
- Les systèmes de coordonnés qui se déduisent l'un de l'autre par un tel changement sont appelés **systèmes de coordonnées Galiléennes** (SCG).
- Exemple de G -**structure intégrable** [Kobayashi 1963].

Dynamique des particules : gravitation Galiléenne

- Soit une particule de masse m **au repos** dans le SCG X'. Pour un observateur travaillant dans le SCG X et tournant à une vitesse de rotation ϖ constante, sa trajectoire est un cercle sous l'impulsion $\dot{p} = m\,\varpi \times (\varpi \times r)$
- En terme des composantes T du torseur, qu'avons-nous fait ?
- As T' is constant

$$\dot{T} = \frac{d}{dt}(P\,T') = \dot{P}\,T' = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi \times r & 1_{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m\,\varpi \times (\varpi \times r) \end{pmatrix}$$

  ce qui suggère que des forces de gravitation peuvent être générées par des variations infinitésimales des transformations Galiléennes
- Si dans tout SCG on se donne $X \mapsto P(X)$, on obtient par différentiation $dX \mapsto dP = \Gamma(dX)$. Inversément, si Γ est donné, existe-t-il $X \mapsto P(X)$ dont Γ est la différentielle ?
- $X_i - X_f = \int_{\mathcal{C}_1} dX$ doit être indépendant du choix du chemin donc $\oint_{\mathcal{C}} dX = 0$ et dans un autre SCG, $\oint_{\mathcal{C}'} P dX' = 0$ d'où:

$$dP\,\delta X' - \delta P\,dX' = \Gamma(dX')\,\delta X' - \Gamma(\delta X')\,dX' = 0$$

Dynamique des particules : gravitation Galiléenne

On invente une nouvelle différentiation :

$$\mathbf{d}T = d(P\,T')|_{X'=X} = (P\,dT' + dP\,T')\,|_{X'=X} = dT + \Gamma(dX)\,T$$

Théorème

La **gravitation Galiléenne** représentée par l'application Γ dont les valeurs sont des transformations Galiléennes linéaires infinitésimales satisfaisant la condition d'intégrabilité, est telle que :

$$\Gamma(dX) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega \times dr - g\,dt & j(\Omega)\,dt \end{pmatrix},$$

où $j(u)$ est l'unique matrice antisymétrique telle que $j(u)v = u \times v$,

- g est la **gravité** classique
- Ω est un nouvel objet appelé **tournoiement**
- Cette dérivée a la même forme dans tous les CSG : $\mathbf{d}T = P\,\mathbf{d}T'$ pourvu que : $\Gamma'(dX') = P^{-1}(\Gamma(P\,dX')\,P + dP)$

La gravitation galiléenne ne se transforme pas comme un tenseur !

$$\Omega = R\,\Omega' - \varpi \qquad g = R\,g' + 2\,\Omega \times u + \frac{\partial u}{\partial t} + \varpi \times u$$

Dynamique des particules : loi du mouvement

Quadri-impulsion :

$$T = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$$

Loi covariante du mouvement

Pour des particules matérielles dans le champ de gravitation :

$$\mathring{T} = \frac{\mathbf{d}T}{dt} = \dot{T} + \Gamma(U)\, T = 0 \ .$$

Dans les SCG : $\boxed{\dot{m} = 0, \qquad \dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times v)}$

[Souriau 1970 Structure des systèmes dynamiques]

Autres forces : quadriforce

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

Loi covariante générale du mouvement

$$\mathring{T} = H \ .$$

Dynamique des particules : gravitation Newtonienne

gravitation Newtonienne

Il existe des SCG particuliers, appelés systèmes de coordonnées **inertiaux** ou **Newtonniens**, pour lesquels la gravitation résultant d'une particule de masse m' passant en r' à l'instant t est donnée par :

$$g = -\frac{k_g\, m'}{\| r - r' \|^2} \frac{r - r'}{\| r - r' \|}, \qquad \Omega = 0 \ ,$$

où k_g est la **constante de gravitation**, égale à $6,674 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$

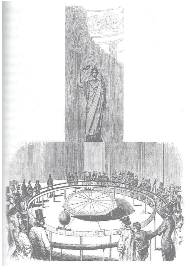
Dynamique des particules : une application

Pendule de Foucault

La loi covariante du mouvement :

$$\dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times v) + F$$

permet d'expliquer simplement le mouvement du pendule de Foucault sans négliger la force centripète comme dans les traités classiques.



- Flashback : loi de transformation de la gravitation galiléenne

$$g - 2\,\Omega \times v = R\,(g' - \Omega' \times v') + \ddot{r}_0 + \dot{\varpi} \times (r - r_0) + \varpi \times (\varpi \times (r - r_0)) + 2\varpi \times (R\,v')$$

- pour le pendule du Panthéon [en km/h^2] : 10^2 1
- Plutôt que de mesurer la vitesse de rotation de la Terre, le pendule de Foucault permet une mesure directe du tournoiement Ω de la même manière que l'observation de la chute des particules permet de mesurer la gravité g.

Dynamique des particules : potentiels de la gravitation Galilénne

- Principe de moindre action : $min \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, r, v)\, dt$ d'où les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}(grad_v\, \mathcal{L}) - grad_r\, \mathcal{L} = 0$$

- Pour une particule en MRU dans le SCG X' : $\mathcal{L}(t, r', v') = \frac{1}{2}\, m \parallel v' \parallel^2$
- Changement de coordonnées $X' \longmapsto X$ avec un boost u : $v = u + R\, v' \quad \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m \parallel v \parallel^2 + \frac{1}{2}\, m \parallel u \parallel^2 - m\, u \cdot v$$

- Sur cette base, nous adopton comme forme générale du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(t, r, v) = \frac{1}{2}\, m \parallel v \parallel^2 + m\, A \cdot v - m\, \phi$$

qui restitue l'équation du mouvement $\dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times v)$ pourvu que :

$$g = -grad\, \phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \Omega = \frac{1}{2}\, curl\, A$$

ϕ et A sont les **potentiels de la gravitation Galiléenne** (4 champs scalaires)

Dynamique des corps rigides

- On généralise en se donnant :

$$dX \mapsto d\tilde{P} = \tilde{\Gamma}(dX) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma_A(dX) & \Gamma(dX) \end{pmatrix}$$

où Γ est la **gravitation** et Γ_A représente le mouvement de l'**observateur**

- puis en différentiant le torseur :

$$\mathbf{d}\tilde{\mu} = d(\tilde{P}\,\tilde{\mu}'\,\tilde{P}^T)|_{X'=X} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}T^T \\ -\mathbf{d}T & \mathbf{d}J \end{pmatrix}$$

avec : $\mathbf{d}T = dT + \Gamma\, T, \qquad \mathbf{d}J = dJ + \Gamma\, J + J\,\Gamma^T + \Gamma_A T^T - T\,\Gamma_A^T$

Loi du mouvement des corps rigides

Le torseur des autres forces étant représenté par :

$$\tilde{\mu}^\star = \begin{pmatrix} 0 & H^T \\ -H & G \end{pmatrix}$$

la loi covariante du mouvement est :

$$\mathring{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu}^\star$$

Dynamique des corps rigides

- Cette dérivée a la même forme dans tous les CSG : $\mathbf{d}\tilde{\mu} = \tilde{P}\mathbf{d}\tilde{\mu}'\tilde{P}^T$ pourvu que : $\tilde{\Gamma}'(dX') = \tilde{P}^{-1}(\tilde{\Gamma}(\tilde{P}\,dX')\,\tilde{P} + d\tilde{P})$
- ce qui conduit à : $\Gamma_A(dX) = dX - \mathbf{d}C$
- Torseur dynamique d'un corps $\mathcal{B}$:

$$\tilde{\mu}(\mathcal{B}) = \iiint_{\mathcal{B}} d\tilde{\mu} \; = \begin{pmatrix} 0 & m_{\mathcal{B}} & p_{\mathcal{B}}^T \\ -m_{\mathcal{B}} & 0 & -q_{\mathcal{B}}^T \\ -p_{\mathcal{B}} & q_{\mathcal{B}} & -j(l_{\mathcal{B}}) \end{pmatrix} ,$$

avec dans un repère barycentrique (1^{er} théorème de König) :

  - la masse : $m_{\mathcal{B}}$,
  - la quantité de mouvement: $p_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}}\dot{r}_{\mathcal{B}}$,
  - le passage : $q_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} r_{\mathcal{B}}$,
  - le moment angulaire : $l_{\mathcal{B}} = r_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}}\dot{r}_{\mathcal{B}} + l_{0\mathcal{B}} = r_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}}\dot{r}_{\mathcal{B}} + \mathcal{J}_{\mathcal{B}}\varpi$,

- La loi covariante du mouvement $\mathring{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu}^\star$ s'écrit :

$$\dot{m}_{\mathcal{B}} = 0, \qquad \dot{p}_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}}\,(g - 2\,\Omega \times \dot{r}_{\mathcal{B}}) + F$$

$$\dot{q}_{\mathcal{B}} = p_{\mathcal{B}}, \qquad \dot{l}_{\mathcal{B}} + \Omega \times l_{0\mathcal{B}} = r_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}}(g - 2\,\Omega \times \dot{r}_{\mathcal{B}}) + M$$

On peut ainsi expliquer le mouvement d'un satellite ou d'une toupie